
Feuille d'exercices n° 8
SUITES D'INTÉGRALES (FIN)
INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^n \ln x & \text{pour } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Soit $x \in [0,1]$. Étudier la limite de $f_n(x)$ quand $n \to +\infty$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ est bien définie puis montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{3^n x}{1+n3^n x^2}$, et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Soit $x \in [0,1]$. Étudier la limite de $f_n(x)$ quand $n \to +\infty$.
2. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis étudier la limite de I_n quand $n \to +\infty$.
3. En déduire que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
4. Montrer en calculant pour tout n, le $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$ que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Exercice 3.
Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

(a) $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$, $a > 0$

(b) $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$

(c) $I_3 = \displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}\,dt$

(d) $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\,dt$

(e) $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$

(f) $I_6 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Exercice 4. (*Intégrales généralisées de fonctions positives et critères de comparaison*)
Etudier la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\tan t}}dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} t}{t^\alpha}dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^{1/4}-t^{1/4}}{t^{1/3}}dt$

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{t}{e^{\sin t}-1}dt$

Exercice 5. (*Intégrales de Bertrand*)
Soit a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a(\ln t)^b}dt$.
On pourra :

1. Lorsque $a = 1$, calculer explicitement $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{t(\ln t)^b}dt$ pour A réel destiné à tendre vers $+\infty$.
2. Lorsque $a \neq 1$, utiliser les fonctions de référence mentionnées en cours et le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Exercice 6. (*Intégrales absolument convergentes*)
Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$, $\alpha > 1$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$, $\alpha > 1$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\cos t)(\sqrt{t}e^{-2t})}{(1+t)\sqrt{|1-t|}} dt$

Exercice 7. (*Fonction Gamma d'Euler*)
On considère la fonction $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Donner le domaine de définition de Γ.
2. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8. (*Des erreurs à ne pas commettre*)

1. Donner un exemple de fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ diverge.}$$
2. Donner un exemple de fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que f ne tende pas vers 0 à l'infini mais dont l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Exercice 9.
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{x}\, dx \leq \sqrt{k+1}.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^n \sqrt{x}\, dx \leq u_n \leq \int_0^{n+1} \sqrt{x}\, dx.$$
3. Montrer l'équivalent : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{3} n\sqrt{n}$.

Exercice 10.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f'(x))^2 dx$ convergent.

1. On note $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x |f(t)|\, dt$. Montrer que G admet une limite finie en $+\infty$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_{x-1}^x |f(t)|\, dt = 0$.
2. Montrer pour tout $x \geq 1$ l'identité :
$$f(x) = \int_{x-1}^x f(t)\, dt + \int_{x-1}^x (t - x + 1) f'(t)\, dt.$$
3. Montrer pour tout $x \geq 1$ la majoration :
$$|f(x)| \leq \int_{x-1}^x |f(t)|\, dt + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\int_{x-1}^x (f'(t))^2\, dt \right)^{1/2}.$$
4. Conclure que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.