
Feuille d'exercices n° 7
Intégration sur un segment au sens de Riemann,
Suites d'intégrales

Exercice 1. (*Des majorations d'intégrales*) ($\star$)

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4} (\sin x)^n dx = 0$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx = 0$.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = 0$.
   Indication. On pourra décomposer l'intégrale en utilisant la relation de Chasles.

Exercice 2. ($\star$)
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \geq 0$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.

1. Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. En effectuant une intégration par parties, démontrer que nI_n tend vers $f(1)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $I_n = \displaystyle\frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x\, dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$:
$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1).$$
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n.$$
5. Montrer que $\dfrac{2^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
6. En déduire que $1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!}$ tend vers e^2 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. ($\star$)
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{1}{2}f(0)$.

Exercice 5. (*Lemme de Riemann-Lebesgue*) ($\star$)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer le résultat suivant :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)dt = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0.$$

Exercice 6.
Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, on note $N(f) = \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{1/2}$.

1. Justifier que $N(f)$ est bien défini dans $\mathbb{R}^+$ pour toute fonction f continue sur $[a, b]$.
2. Montrer que si f est continue sur $[a, b]$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.
3. Montrer que si f et g sont continues sur $[a, b]$, alors
$$N(f + g) \leq N(f) + N(g).$$
4. Montrer que si f est continue sur $[a, b]$, alors
$$\left|\int_a^b f(x) dx\right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sqrt{b-a}\, N(f).$$
5. Montrer que si f est continue sur $[a, b]$, alors $N(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$.

Exercice 7. ($\star$)

1. On définit la fonction f sur $]0, +\infty[$ par : pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t} dt.$$
Montrer que f est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f'.
2. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \int_0^{x^2} \left(\mathrm{Arctan}(t + x)\right)^2 dt.$$
Montrer que g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g'.

Exercice 8. ($\star$)
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$F(0) = \ln 2, \text{ et } \forall x \neq 0,\ F(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, $F(x) = \ln 2 - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt$.
2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout t réel, on a :
$$0 \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}.$$
En déduire que pour tout x réel, on a l'inégalité : $|F(x) - \ln 2| \leq \frac{3}{4} x^2$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (on pourra intégrer par parties).
5. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $F'(x)$ pour $x \neq 0$.
6. Montrer que F est également dérivable en 0 et calculer $F'(0)$.

Exercice 9.
On définit une application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par :
$$f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \quad \text{pour } t \in]0, 1[,\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$
On définit également une application $F :]0, 1[\to \mathbb{R}$ par :
$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. Pour $x \in]0,1[$, quel est le signe de $F(x)$?
3. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
4. (a) Pour $x \in]0,1[$, montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \ln(2)$.

   (b) Pour $x \in]0,1[$, montrer les inégalités : $x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x\ln(2)$.

   (c) En déduire l'existence et la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} F(x)$.

   (d) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$.
5. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$.

   (b) Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 10.
Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(t) = \frac{t^2}{t^2 + \sin^2(t)} \qquad \text{pour } t \neq 0, f(0) = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que f est une fonction continue. Est-elle dérivable ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (sans présupposer son existence).
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt.$$

   Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée. Montrer qu'elle est impaire.
4. Pour $x > 0$, montrer les inégalités

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1}dt \leq F(x) \leq x$$

   et en déduire que

$$x - \arctan(2x) + \arctan(x) \leq F(x) \leq x.$$

Exercice 11. (*Sommes de Riemann*) ($\star$)
Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies pour $n \geq 1$:

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$

2) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n-1} k^2 \sin(k\pi/n)$

3) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\Big(\frac{(2n)!}{n!}\Big)^{1/n}$

4) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$

5) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+\cos(k)}{k^2+n^2}$

6) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha+\beta} + \frac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}$ avec α, β deux nombres réels strictement positifs.