Feuille d'exercices n° 6

Intégration sur un segment au sens de Riemann, Calculs d'intégrales, primitives

Exercice 1. (*Primitives de fractions rationnelles*)
Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

(a) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

(b) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-3x+2}\,dx$

(e) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+9}\,dx$

(g) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$

(h) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^4(x-1)^3}\,dx$

(j) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(k) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\,dx$

(l) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

(m) $\displaystyle\int \frac{5x}{x^4+1}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5}\,dx$

Exercice 2. (*Primitives de polynômes et fractions rationnelles en* cos *et* sin)

1. $(\star)$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbb{R}\ \cos^{2k} x = (1-\sin^2 x)^k$, déteminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \cos^{2k+1} x$.
2. $(\star)$ Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \cos^4 x$. *On linéarisera* $\cos^4 x$.
3. *Primitives de fractions rationnelles en* cos *et* sin. On veut calculer les primitives d'une fonction de la forme $R(\cos x, \sin x)$ où R est une fraction rationnelle en deux variables.
   Le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ permet toujours de se ramener au calcul des primitives d'une fraction rationnelle en t. Mais les calculs sont souvent assez lourds (et le degré du dénominateur assez élevé). On peut dans certains cas utiliser un autre changement de variable, donné par les règles de Bioche :
   – si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariant par le changement de x en $\pi - x$, alors on pose $t = \sin x$;
   – si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariant par le changement de x en $-x$, alors on pose $t = \cos x$;
   – si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariant par le changement de x en $x + \pi$, alors on pose $t = \tan x$.
   Calculer les intégrales suivantes

   (a) $(\star)$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

   (b) $(\star)$ $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}dx$

   (c) $(\star)$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+2\cos x}dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

   (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan x}{1+\sin(2x)}dx$

   (f) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x+2\tan^2 x}dx$

Exercice 3. (*Calculs d'intégrales, intégration par parties, changement de variable*) $(\star)$
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{1+x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+1)e^{-x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{1/2} (\text{Arcsin}\, x)^2\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{5\,\text{ch}\, x+3\,\text{sh}\, x+4}dx$

Exercice 4. (*Encore des calculs*)
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+3)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ (poser $x=\cos\theta$)

(c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t=\sqrt{x+1}$)

(d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ (poser $t=\sqrt{2}/x$)

(e) $\displaystyle\int_2^3 x^2\ln(x^6-1)\,dx$ (poser $t=x^3$)

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{(\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t)^n}$, $n\in\mathbb{N}$

(h) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$

(j) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{t+7}{t+6}}\,dt$

Exercice 5. ($\star$) En utilisant le changement de variable $t=\pi-x$, calculer :

$$I=\int_0^\pi x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Exercice 6. Pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx.$

1. Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Comparer $B(p,q)$ et $B(q,p)$.
2. Montrer que pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, $B(p,q)=\dfrac{p}{q+1}B(p-1,q+1)$.
3. Calculer $B(0,n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. En déduire la valeur de $B(p,q)$ pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

Exercice 7. (*Calcul d'aire*) ($\star$)
On note $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x\le 1,\ \frac{1}{1+x^2}\le y\le e^{x/2}\}$.

1. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, $\dfrac{1}{1+x^2}\le e^{x/2}$.
2. Dessiner D.
3. Calculer l'aire de D.

Exercice 8. (*Fonctions en escalier*)
Soit a,b deux réels tels que $a<b$. Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$.

1. Montrer que le produit fg est une fonction en escalier sur $[a,b]$.
2. On suppose ici que g ne s'annule pas sur $[a,b]$. Montrer que $\dfrac{f}{g}$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.
3. On suppose ici que $g([a,b])\subset[a,b]$ de sorte que $f\circ g$ est bien définie sur $[a,b]$. La composée $f\circ g$ est-elle une fonction en escalier sur $[a,b]$?

Exercice 9. (*Continuité uniforme*)

1. Montrer que la fonction $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. (*Intégrales et parité*) ($\star$)
Soit $a > 0$. Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.

1. Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
2. Montrer que si f est impaire , alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Exercice 11. (*Intégrales de fonctions périodiques*) ($\star$)
Soit $T > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et $T-$périodique.

1. Montrer que pour tous réels a et b,
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx.$$
2. Montrer que pour tout réel a,
$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx.$$

Exercice 12.
Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction *continue*.

1. Montrer que si f est de plus à valeurs positives, et telle que $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
2. Montrer que
$$f \text{ est de signe constant sur } [a, b] \text{ si et seulement si } \int_{a}^{b} |f(t)|dt = \left|\int_{a}^{b} f(t)dt\right|.$$