Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Analyse 2 – Cursus préparatoire, $1^{\text{ère}}$ année

Feuille d'exercices n° 5

Formules de Taylor

Exercice 1. (*Différences finies*) ($\star$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

2. On suppose désormais que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $\ell > 0$, il existe $C_{x,\ell} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $h \in [-\ell, \ell]$,

$$\left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{C_{x,\ell}}{12} h^2.$$

Exercice 2. Soit $a > 0$.

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5. Montrer que l'on a :

$$\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos \frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Exercice 3. ($\star$)

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour le logarithme népérien sur l'intervalle $[1, 2]$ avec le reste à l'ordre 3. En déduire que $\frac{1}{2} < \ln 2$.
2. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, avec le reste à l'ordre 4. En déduire, à l'aide de la question précédente, que :

$$\frac{79}{48} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{1}{192}.$$

Exercice 4. ($\star$)

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ entre 25 et 26, avec un reste à l'ordre 2.
2. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{26}$.

Exercice 5. Soit $x \in]0; +\infty[$. Montrer l'encadrement suivant :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 6.

1. Montrer que pour tout x réel tel que $0 < x < 1$, on a l'inégalité : $\operatorname{ch} x < 1 + x^2$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités :

$$0 < (1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} < \frac{5x^3}{81}.$$

Exercice 7. ($\star$)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.
2. Montrer que pour tout $u \in [0,1]$, $\sqrt{1-u} \leq 1 - \dfrac{u}{2}$.
3. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $\cos x - \sqrt{1-x^2} \geq 0$.
4. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au point 0 appliquée à la fonction $u \mapsto \sqrt{1-u}$, montrer que pour tout $x \in [0, \dfrac{\pi}{4}]$,

$$1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8(1-(\pi/4))^{3/2}} \leq \sqrt{1-x^2}.$$

5. Déterminer un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \dfrac{\pi}{4}]$,

$$0 \leq \cos x - \sqrt{1-x^2} \leq Mx^4.$$

Exercice 8. ($\star$)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on note $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $h > 0$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 9. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose en outre que f est dérivable en 0 et en 1, et que $f'(0) = f'(1) = 0$.
On désigne par g l'application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $t \in]0,1[$ par

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} - \frac{f(t)-1}{t-1}.$$

1. Montrer que g est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
2. En déduire qu'il existe un $\alpha \in]0,1[$ tel que :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1},$$

puis montrer que $f(\alpha) = \alpha$.

3. On suppose désormais que f est deux fois dérivable sur $[0,1]$. Soit $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
   (a) On suppose ici que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$. Écrire la formule de Taylor pour f sur l'intervalle $[0,\alpha]$ et en déduire l'existence d'un x dans $]0,\alpha[$ tel que $f''(x) \geq 4$.
   (b) On suppose ici que $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Par une méthode analogue, montrer cette fois l'existence d'un y dans $]\alpha,1[$ tel que $f''(y) \leq -4$.
   (c) En conclure qu'il existe $b \in]0,1[$ tel que $|f''(b)| \geq 4$.

Exercice 10.

1. Soit $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Montrer qu'il existe un unique $\theta_x \in]0;1[$ tel que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta_x x).$$

2. En écrivant par ailleurs la formule de Taylor-Lagrange avec reste à l'ordre 5 pour sin entre 0 et x, montrer que θ_x admet une limite quand x tend vers 0^+ et préciser cette limite.

Exercice 11. (*Méthode de Newton*)
Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$.
La méthode de Newton est un algorithme permettant le calcul d'une valeur approchée de cette solution x à $f(x) = 0$. Pour cela, on construit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit (les hypothèses nécessaires à la définition de $(y_n)_n$ seront précisées plus loin) :

$$y_0 \in [a, b], \quad \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}. \tag{1}$$

1. Faire un dessin illustrant le principe de la méthode de Newton (dessiner le graphe d'une telle fonction f et quelques termes de la suite $(y_n)_n$).
2. *Préliminaires.*
   (a) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $r_0 < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} \leq r_n^2$. En utilisant la suite définie par $s_0 = r_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = s_n^2$, montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n \leq (r_0)^{2^n},\ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} r_n = 0.$$

   (b) Justifier l'existence de $M_2 = \max\limits_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.
   (c) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $m_1 = \min\limits_{t\in[x-\eta, x+\eta]} |f'(t)|$ soit un réel bien défini et strictement positif.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons y_n bien défini et $f'(y_n) \neq 0$. Montrer qu'il existe un réel c_n dans l'intervalle fermé de bornes x et y_n tel que

$$y_{n+1} - x = \frac{f''(c_n)}{2f'(y_n)}(y_n - x)^2.$$

4. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \varepsilon < \min\left(\eta, \dfrac{2m_1}{M_2}\right)$. Soit $y_0 \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.
   (a) Montrer qu'alors la suite $(y_n)_n$ définie par (1) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.
   (b) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{M_2}{2m_1}|y_n - x|$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} \leq r_n^2$. En déduire que

   $$\lim_{n\to+\infty} y_n = x.$$