Feuille d'exercices n° 4
Équivalents, développements limités (suite) ;
développements asymptotiques

Exercice 1. ($\star$)

1. *Un exemple.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant le développement limité suivant au voisinage de 1 :
$$f(x) = 1 + 2(x-1) - 4(x-1)^2 + \underset{x \to 1}{o}\Big((x-1)^2\Big).$$
   (a) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f, $\mathcal{C}_f$, au point d'abscisse 1 ?
   (b) Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de cette tangente au voisinage du point d'abscisse 1 ?
2. Soit $m \geq 2$ un entier, I un intervalle ouvert, x_0 un point de I et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, qu'on suppose m fois dérivable au point x_0.
On note Δ la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$.
On suppose qu'il existe un entier $r \in \{2, \dots, m\}$ tel que $f^{(r)}(x_0) \neq 0$ et on note N le plus petit entier $r \in \{2, \dots, m\}$ tel que $f^{(r)}(x_0) \neq 0$.
   (a) i. Écrire une équation de Δ regroupée sous forme $y = g(x)$.
   ii. Écrire un équivalent simple de $f(x) - g(x)$ pour x tendant vers x_0.
   (b) Montrer que si N est pair et si $f^{(N)}(x_0) > 0$ (resp. < 0), il existe un $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset I$ et que le graphe de la restriction de f à $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ est inclus dans le demi-plan limité par Δ et situé au-dessus (resp. au-dessous) de celle-ci.
   (c) Que peut-on dire quand N est impair ?
   (d) Dans cette question, on suppose que $f'(x_0) = 0$. Montrer que si N est pair, f admet un extremum local strict en x_0 et que si N est impair, elle n'admet pas d'extremum local en x_0.

Exercice 2. On définit les deux fonctions suivantes :
$$f : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1-x^2) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1 \end{array}.$$

1. Déterminer les développements limités de f et de g à l'ordre 5, quand x tend vers 0.
2. En déduire l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta; 0[\cup]0; \eta[$, $f(x) < g(x)$.

Exercice 3. Calculer un développement limité ou asymptotique de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. ($\star$) $f(x) = x^2 \ln x$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5,
2. ($\star$) $f(x) = \sqrt{2+x}$ où x tend vers 0 et à l'ordre 3,
3. $f(x) = \ln(2+x)$ où x tend vers 0 et à l'ordre 2,
4. ($\star$) $f(x) = \sin x$ où x tend vers $\dfrac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3,
5. $f(x) = \ln(\sin x)$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ à l'ordre 3,
6. ($\star$) $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs,
7. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs.

Exercice 4. ($\star$) Calculer les limites suivantes (en montrant leur existence) :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3-2x}{x-1}}-x$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right)$.

Exercice 5. Soit a et m deux réels. Etudier le comportement, quand x tend vers $+\infty$ de

$$f(x)=\sqrt{x^3+ax^2+x}-mx\sqrt{x+2}.$$

Discuter suivant les valeurs de a et m, et donner un équivalent de $f(x)$.

Exercice 6. En utilisant des développements asymptotiques, étudier les branches infinies des graphes des fonctions suivantes :

1. ($\star$) $f_1(x)=\sqrt{x^2+x+1}$;
2. ($\star$) $f_2(x)=x^3\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$;
3. $f_3(x)=\dfrac{x^3+2}{x-1}$;
4. $f_4(x)=x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.