Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016
Analyse 2 – Cursus préparatoire, $1^{\text{ère}}$ année

Feuille d'exercices n° 2

FONCTIONS RÉCIPROQUES, TRIGONOMÉTRIE

Définition et premières propriétés des fonctions hyperboliques réciproques

Exercice 1. (*La fonction* Argsh) ($\star$)

1. Montrer que la fonction $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective et continue. On note $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{Argsh}\, y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$
3. Tracer l'allure du graphe de Argsh.
4. Montrer que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{Argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Exercice 2. (*La fonction* Argch)

1. Montrer que la fonction ch réalise une bijection continue de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$. On note $\mathrm{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ sa fonction réciproque.
2. Montrer que pour tout $y \in [1, +\infty[$,
$$\mathrm{Argch}\, y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$
3. Tracer l'allure du graphe de Argch.
4. Montrer que Argch est dérivable sur $]1, \infty[$ et que pour tout $y > 1$,
$$\mathrm{Argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Exercice 3. (*La fonction* Argth)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$.
2. Montrer que la fonction $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est bijective et continue. On note $\mathrm{Argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.
3. Montrer que pour tout $y \in]-1, 1[$,
$$\mathrm{Argth}\, y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$
4. Tracer l'allure du graphe de Argth.
5. Montrer que Argth est dérivable sur $]-1, 1[$ et que pour tout $y \in]-1, 1[$,
$$\mathrm{Argth}'(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

Trigonométrie hyperbolique

Exercice 4. Montrer les formules suivantes, valables pour tous réels x, y :

1. $\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(y) = \mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{ch}^2(y) = \mathrm{ch}(x+y)\ \mathrm{ch}(x-y)$,
2. $\mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 2\ \mathrm{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \mathrm{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$,
3. $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(y) = 2\ \mathrm{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \mathrm{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$,
4. $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$.

Exercice 5. Résoudre le système suivant d'inconnues réelles x et y : $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(y) = 3 \\ \mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 2 \end{array} \right.$.

Exercice 6.

1. Calculer $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$.
2. Utiliser le résultat pour trouver les solutions réelles de l'équation :

$$2\ \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \sqrt{3}\ \mathrm{ch}(5x).$$

Indication : utiliser une des formules de l'exercice 4.

Exercice 7. (*Linéarisation*) Soit $u \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\mathrm{ch}^5(u)$ en fonction de puissances de e^u puis en fonction de termes du type $\mathrm{ch}(ku)$, $k \in \mathbb{N}$.
2. Même question avec $\mathrm{sh}^4(u)$.

Manipulations des fonctions réciproques

Exercice 8. ($\star$) Calculer les quantités suivantes :

1. $\mathrm{Arcsin}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$
4. $\mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)\right)$
5. $\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{82\pi}{11}\right)\right)$
6. $\mathrm{sh}\left(\mathrm{Argsh}\left(1\right)\right)$
7. $\mathrm{Argch}\left(\mathrm{ch}(1-\ln 5)\right)$.

Exercice 9. Montrer que l'équation $\mathrm{Argsh}\, x + \mathrm{Argch}\, x = 1$ admet une unique solution réelle, puis la déterminer.

Exercice 10. Donner le domaine de définition de la fonction numérique f définie par

$$f(x) = \mathrm{Argch}\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right],$$

et simplifier son expression.

Exercice 11. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \mathrm{Argth}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
2. Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$ et en déduire une expression plus simple de chacune des restrictions de f aux trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;+\infty[$.

Exercice 12. ($\star$)

1. Montrer qu'il existe un polynôme P du quatrième degré tel que pour tout réel x, on ait l'identité $16x^6 + 24x^4 + 9x^2 + 1 = (x^2+1)P(x)$ et expliciter ce polynôme.
2. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \operatorname{Argsh}(3x + 4x^3)$.
   (a) Préciser l'ensemble de définition de f, puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
   (b) Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 13. Soit a et b deux réels strictement positifs. On note θ l'argument du nombre complexe $a + ib$ qui vérifie $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. En se penchant sur le triangle de sommets 0, a et $a + ib$, montrer que :

$$\theta = \operatorname{Arctan} \frac{b}{a}.$$

En déduire que le réel

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$$

est un argument du nombre complexe $(2+i)(5+i)(8+i)$. Calculer également les parties réelle et imaginaire de $(2+i)(5+i)(8+i)$ et en déduire une expression simple de :

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}.$$

Exercice 14.

1. Montrer que $0 \leq \operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{5}{13} \leq \frac{\pi}{2}$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{5}{13}$.