Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Analyse 2 – Cursus préparatoire, 1ère année

Feuille d'exercices n° 1

Analyse réelle, continuité, dérivabilité

Exercice 1. ($\star$) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux applications continues.

1. Montrer que, si $f([0,1]) \subset [0,1]$, alors f possède un point fixe.
2. Faire de même en supposant cette fois que $[0,1] \subset f([0,1])$.
3. On suppose que $f([0,1]) \subset [0,1]$, $g([0,1]) \subset [0,1]$ et que, de plus $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Supposons que $f - g$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que $f > g$ ou $f < g$, c'est-à-dire
   $$\Big(\forall x \in [0,1],\ f(x) > g(x)\Big) \text{ ou } \Big(\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)\Big).$$
   (b) Soit x_0 un point fixe de f. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f(x_n)$.
      ii. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (c) Conclure.

Exercice 2. Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell \in [0,1[$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq kg(x)$.

Exercice 4. ($\star$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. ($\star$)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
   (b) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déduire de la question précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 6. On pose
$$A = \left\{ \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x - y} \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \right\}.$$
Montrer que A possède des bornes inférieure et supérieure et les déterminer.

Exercice 7. ($\star$) Déterminer en quels points les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (1 + |x|)e^{-|x|}$;

2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur n la fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition sur n ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. À quelle condition sur n cette dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 9. (*Interpolation*) ($\star$)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que f'' soit continue. Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \neq b$.
Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on définit $\phi_{\alpha,\beta} : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \alpha + \beta(x-a)$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\phi_{\alpha,\beta}(a) = f(a)$ et $\phi_{\alpha,\beta}(b) = f(b)$.
   Dans la suite, α et β vérifient cette propriété.
2. Montrer que si $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable qui s'annule au moins trois fois, alors g'' s'annule au moins une fois.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1] \setminus \{a,b\}$, il existe $\gamma_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \phi_{\alpha,\beta}(x) + \gamma_x (x-a)(x-b)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f(x) - (\alpha + \beta(x-a))| \ \leq \ |(x-a)(x-b)| \ \frac{1}{2} \max_{[0,1]} |f''|.$$

Exercice 10. ($\star$)

1. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $e^x - 1 > x > 0$.
   Indication : on pourra au choix étudier les variations d'une fonction bien choisie, appliquer le théorème des accroissements finis ou écrire $e^x - 1$ comme une intégrale.
   (b) En déduire que si $x \geq 0$ vérifie $x(e^x - 1) = x^2$, alors $x = 0$.
2. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{e^{u_n} - 1}$.
   (a) Montrer que (u_n) est décroissante.
   (b) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 11.

1. Montrer que l'équation (E) : $2\ln x - x + 2 = 0$ en $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution sur $[2, +\infty[$.
   On note a cette solution. Vérifier que de plus $a \in \,]5,6[$.
2. Afin de déterminer une approximation de a, on introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où $\varphi :\ [2,+\infty[\to [2,+\infty[,\ x \mapsto 2\ln x + 2$.
   (a) i. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [5,6]$.
       ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
       iii. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est a.
   (b) i. Montrer que, pour tout $x \in [5,6]$, $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$.
       ii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - a| \ \leq \ \frac{2}{5}\ |u_n - a|.$$

       iii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (c) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près.