
Feuille d'exercices n° 8
FONCTIONS RÉCIPROQUES, TRIGONOMÉTRIE

Exercice 8.1(∗) Calculer les quantités suivantes :

1. $\text{Arcsin}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\text{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$
4. $\text{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)\right)$
5. $\text{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{82\pi}{11}\right)\right)$
6. $\text{sh}\left(\text{Argsh}\left(1\right)\right)$
7. $\text{Argch}\left(\text{ch}(1-\ln 5)\right)$.

Exercice 8.2 Soit a et b deux réels strictement positifs. On note θ l'argument du nombre complexe $a+ib$ qui vérifie $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

1. Avec un argument géométrique, montrer que : $\theta = \text{Arctan}\,\dfrac{b}{a}$.
2. En déduire que le réel $\text{Arctan}\,\dfrac{1}{2}+\text{Arctan}\,\dfrac{1}{5}+\text{Arctan}\,\dfrac{1}{8}$ est un argument du nombre complexe $(2+i)(5+i)(8+i)$.
3. Calculer également les parties réelle et imaginaire de $(2+i)(5+i)(8+i)$ et en déduire une expression simple de :
$$\text{Arctan}\,\frac{1}{2}+\text{Arctan}\,\frac{1}{5}+\text{Arctan}\,\frac{1}{8}.$$

Exercice 8.3

1. Montrer que $0 \leq \text{Arcsin}\,\dfrac{4}{5}+\text{Arcsin}\,\dfrac{5}{13} \leq \dfrac{\pi}{2}$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $\text{Arcsin}\,x = \text{Arcsin}\,\dfrac{4}{5}+\text{Arcsin}\,\dfrac{5}{13}$.

Exercice 8.4 Montrer les formules suivantes, valables pour tous réels x, y :

1. $\text{ch}^2(x)+\text{sh}^2(y)=\text{sh}^2(x)+\text{ch}^2(y)=\text{ch}(x+y)\ \text{ch}(x-y)$,
2. $\text{sh}(x)+\text{sh}(y)=2\ \text{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\text{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$,
3. $\text{ch}(x)-\text{ch}(y)=2\ \text{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\text{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$,

Exercice 8.5

1. Calculer $\text{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\text{sh}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$.
2. Utiliser le résultat pour trouver les solutions réelles de l'équation :
$$2\ \text{ch}(x)+\text{sh}(x)=\sqrt{3}\ \text{ch}(5x).$$

Exercice 8.6 Résoudre le système suivant d'inconnues réelles x et y : $\left\{\begin{array}{l}\text{ch}(x)+\text{ch}(y)=3\\ \text{sh}(x)+\text{sh}(y)=2\end{array}\right.$.

Exercice 8.7(∗) Linéarisation

1. Soit $u \in \mathbb{R}$. Exprimer $\operatorname{ch}^5(u)$ en fonction de puissances de e^u puis en fonction de termes du type $\operatorname{ch}(ku)$, $k \in \mathbb{N}$.
2. Même question avec $\operatorname{sh}^4(u)$.

Exercice 8.8 Montrer que l'équation $\operatorname{Argsh} x + \operatorname{Argch} x = 1$ admet une unique solution réelle, puis la déterminer.

Exercice 8.9(∗) On considère la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arcsin} \dfrac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$.

1. Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f ?
2. Calculer f' là où elle définie et en déduire une expression plus simple de f.
3. Représenter le graphe de f.

Exercice 8.10 Soit f la fonction numérique définie par $f\colon x \mapsto \operatorname{Argth}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
2. Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$ et en déduire une expression plus simple de chacune des restrictions de f aux trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;+\infty[$.