
Feuille d'exercices n° 7
CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ

Exercice 7.1(*) Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues.

1. Montrer que, si $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, alors f possède un point fixe.
2. Faire de même en supposant cette fois que $[0, 1] \subset f([0, 1])$.
3. On suppose que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, $g([0, 1]) \subset [0, 1]$ et que, de plus $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Supposons que $f - g$ ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

(a) Montrer que $f > g$ ou $f < g$, c'est-à-dire

$$\left(\forall x \in [0, 1], f(x) > g(x)\right) \text{ ou } \left(\forall x \in [0, 1], f(x) < g(x)\right).$$

(b) Soit x_0 un point fixe de f . On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

- i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f(x_n)$.
- ii. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(c) Conclure.

Exercice 7.2 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, 1[$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7.3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq kg(x)$.

Exercice 7.4(*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur \mathbb{R} .

Exercice 7.5

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.

2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

(b) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Dédurre de la question précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 7.6(*)

1. Montrer que $x \mapsto x \ln x$ est uniformément continue sur $]0, 1]$.

2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .

3. Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R}_+^* .

4. Soit $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 7.7(*) Déterminer en quels points les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1 + |x|)e^{-|x|}$;
2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 7.8(*) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit $f_n : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur n la fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition sur n ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. À quelle condition sur n cette dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 7.9

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que f'' soit continue. Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a \neq b$. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on définit $\phi_{\alpha, \beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \alpha + \beta(x - a)$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\phi_{\alpha, \beta}(a) = f(a)$ et $\phi_{\alpha, \beta}(b) = f(b)$.
Dans la suite, α et β vérifient cette propriété.
2. Montrer que si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable qui s'annule au moins trois fois, alors g'' s'annule au moins une fois.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1] \setminus \{a, b\}$, il existe $\gamma_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \phi_{\alpha, \beta}(x) + \gamma_x(x - a)(x - b)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$|f(x) - (\alpha + \beta(x - a))| \leq |(x - a)(x - b)| \frac{1}{2} \max_{[0, 1]} |f''|.$$

Exercice 7.10

1. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $e^x - 1 > x > 0$.
Indication : on pourra au choix étudier les variations d'une fonction bien choisie, appliquer le théorème des accroissements finis ou écrire $e^x - 1$ comme une intégrale.
(b) En déduire que si $x \geq 0$ vérifie $x(e^x - 1) = x^2$, alors $x = 0$.
2. On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{e^{u_n} - 1}$.
(a) Montrer que (u_n) est décroissante.
(b) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 7.11(*)

1. Montrer que l'équation (E) : $2 \ln x - x + 2 = 0$ en $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution sur $[2, +\infty[$. On note a cette solution. Vérifier que de plus $a \in]5, 6[$.
2. Afin de déterminer une approximation de a , on introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où $\varphi : [2, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$, $x \mapsto 2 \ln x + 2$.
(a) i. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [5, 6]$.
ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
iii. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est a .
(b) i. Montrer que, pour tout $x \in [5, 6]$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{5}$.
ii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{5} |u_n - a|.$$

- iii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

- (c) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près.