Fiche d'exercices 1 : Calcul matriciel.

Exercice 1.1(∗) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
Parmi les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB, lesquels ont un sens ? Calculez-les.

Exercice 1.2 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ?

Exercice 1.3

1. À tout nombre réel t on associe la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$.
   (a) Pour $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, montrer que $A(t_1)A(t_2) = A(t_1 + t_2)$.
   (b) Montrer que $A(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbf{R}$ et calculer $(A(t))^{-1}$.
2. Mêmes questions avec la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Exercice 1.4

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?
   (b) Déterminer toutes les matrices F telles que $AF = 0$ (0 étant la matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls).
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.
3. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.
   Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

Exercice 1.5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 1.6 Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer que A est inversible et calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 1.7(∗)

1. Soit $n \geq 1$ un entier et $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a
$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geq 3$.

Exercice 1.8(∗) Soit m un réel non nul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A + I)(A - 2I)$.
2. Soit $B = \frac{1}{3}(A+I)$ et $C = \frac{1}{3}(A-2I)$. Calculer B^2 et C^2. En déduire une expression simple de B^n et C^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C$.

Exercice 1.9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I, A et A^2.
3. Exprimer A^4 et A^5 en fonction de I, A, et A^2.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ il existe a_n, b_n, c_n tels que $A^n = a_n I + b_n A + c_n A^2$.

Exercice 1.10 Soit A, B deux matrices carrées telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 1.11 Soit n un entier, K un corps et A une matrice telle que pour tout $B \in M_n(K)$ on ait $AB = BA$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda I$.

Exercice 1.12(∗) Déterminer si les matrices suivantes sont échelonnées (en ligne ou en colonne) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 47 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 1.13(∗) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée (en lignes) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.14(∗) Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \bar\alpha & \bar\alpha^2 \\ \alpha & 1 & \bar\alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbf{C}) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.15 Déterminer sous quelles conditions les systèmes suivants (d'inconnues parmi x_1, x_2, x_3 et x_4) admettent une solution :

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = a \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = b \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = c \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = d \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_3 = b \\ x_1 + x_2 = c \end{cases}$

Exercice 1.16 Résoudre, en fonction du paramètre $m \in \mathbf{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

1. $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases}$