
Feuille 10 : Formules de Taylor, équivalents, développements limités et asymptotiques

Exercice 10.1(*) Soit $a > 0$.

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction cosinus, sur l'intervalle $[0, a]$.
Montrer que l'on a :

$$\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos \frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Exercice 10.2 Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ entre 25 et 26. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{26}$.

Exercice 10.3 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que f et f'' sont bornées sur \mathbf{R} et on note $M_0 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, tout $h > 0$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$

2. En déduire que f' est bornée sur \mathbf{R} et que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 10.4(*) On pose $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$. Donner un équivalent simple de f lorsque x tend vers 0, $+\infty$, 2, et 1.

Exercice 10.5 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$:

- | | | |
|---|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1. (*) $f_1(x) = x + \cos x$, | 4. $f_4(x) = x + \sin x$, | 7. $f_7(x) = x^4 + e^x$, |
| 2. (*) $f_2(x) = x^2 + \sin x$, | 5. $f_5(x) = \sqrt{x} + \ln x$, | 8. $f_8(x) = e^{2x} - \sqrt{x}$, |
| 3. (*) $f_3(x) = \operatorname{sh} x$, | 6. $f_6(x) = xe^x$, | 9. $f_9(x) = \operatorname{ch} x$. |

Exercice 10.6(*) Étudier la limite de f en a lorsque

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{2x(x-3)}$ et $a = +\infty$, | (d) $f(x) = \frac{x^2+3\ln(x)}{2x^2\sqrt{1+x}}$ et $a = +\infty$, |
| (b) $f(x) = (\pi - 2x) \tan(x)$ et $a = \frac{\pi}{2}$, | |
| (c) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^3+2x^2} - \frac{x^3-x}{\sqrt{x^4+x^3}}$ et $a = +\infty$, | (e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$ et $a = e$. |

Exercice 10.7 Établir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n proposé :

- | | |
|---|--|
| (a) (*) $f(x) = e^{-x}$ et $n = 5$, | (g) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ et $n = 6$, |
| (b) (*) $f(x) = \ln(1 + \operatorname{sh} x)$ et $n = 4$, | (h) $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ et $n = 7$, |
| (c) (*) $f(x) = \frac{1}{2+x}$ et $n = 3$, | (i) $f(x) = e^{3x} \sin(2x)$ et $n = 4$, |
| (d) (*) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$ et $n = 2$, | (j) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ et $n = 3$, |
| (e) (*) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ et $n = 3$, | (k) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ et $n = 3$. |
| (f) (*) $f(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{1+x}\right)$ et $n = 4$, | |

Exercice 10.8 Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| (a) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$ | (g) (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ |
| (b) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ | (h) (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}$. |
| (c) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, a \in \mathbb{R}^*$ | |

Exercice 10.9 On définit les fonctions $f : x \in]-1, 1[\mapsto \ln(1 - x^2)$ et $g : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1$.

- Déterminer les développements limités de f et de g à l'ordre 5, quand x tend vers 0.
- En déduire l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta; 0[\cup]0; \eta[$, $f(x) < g(x)$.

Exercice 10.10 Calculer un développement limité ou asymptotique de f dans les cas suivants :

- | | |
|---|---|
| 1. (*) $f(x) = \sqrt{2+x}$ en 0, à l'ordre 3, | 4. $f(x) = x^2 \ln x$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5, |
| 2. (*) $f(x) = \ln(\sin x)$ en $\frac{\pi}{2}$, à l'ordre 3, | 5. $f(x) = \ln(2+x)$ en 0, à l'ordre 2, |
| 3. (*) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs. | 6. $f(x) = \sin x$ en $\frac{\pi}{4}$, à l'ordre 3, |
| | 7. $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs, |

Exercice 10.11(*) Calculer les limites des suites de terme général

- | | |
|--|---|
| 1. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$ | 3. $u_n = (\sin \frac{1}{n})^{1/n}$ |
| 2. $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$ | 4. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ |

Exercice 10.12(*)

- Trouver un équivalent simple pour les suites définies par $u_n = \sin \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \ln \sin \frac{1}{n}$.
- Trouver un développement asymptotique à la précision $1/n^2$ des suites $u_n = \ln(n+1)$, $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et un développement à la précision $1/n$ de la suite $w_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.