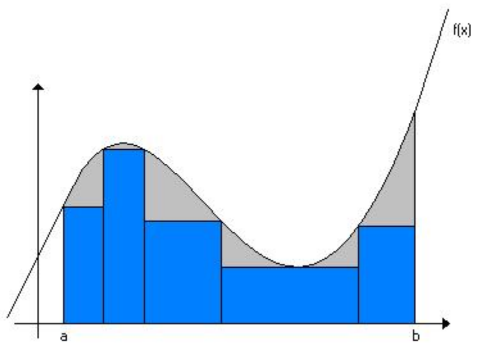

Ci-dessus on a $n = 5$, c'est-à-dire qu'on a partitionné $[a, b]$ en 5 intervalles $[a, a_1], \ldots, [a_4, a_5]$. Dans chacun de ces intervalles on a choisi un point x_k et formé le rectangle dont deux côtés sont de longueur $a_i - a_{i-1}$ et les deux autres de longueur [i] $f(x_i)$; et la somme de Riemann correspondante est la somme des aires (algébriques) de ces rectangles. La différence entre ce qu'on voudrait appeler « l'aire sous la courbe »de f et la somme de Riemann est l'aire de la partie grise sur la figure ci-dessus. On se doute que si les intervalles de la subdivision sont de plus en plus fins alors l'aire de la partie grise va tendre vers 0, et l'intégrale de f sur $[a, b]$ sera ainsi obtenue comme la limite des aires des rectangles bleus. Notons que dans le dessin tous les rectangles sont sous le graphe de f, afin de rendre la figure plus lisible ; en général on n'impose pas cette condition et une partie des rectangles pourrait dépasser au-dessus du graphe de f.

L'explication intutive qu'on vient de donner nous amène à la définition suivante.

Définition 7.13. Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est *intégrable sur* $[a, b]$ s'il existe un réel l tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ satisfaisant

$$|S(f, \sigma) - l| \leq \varepsilon$$

pour toute subdivision pointée σ de $[a, b]$ de pas $< \delta$. On note alors $l = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Autrement dit : quand le pas de la subdivision σ tend vers 0, la somme de Riemann $S(f, \sigma)$ tend vers l ; une autre formulation équivalente : pour toute suite σ_i de subdivisions pointées dont le pas tend vers 0, la suite de sommes de Riemann $S(f, \sigma_i)$ est convergente.

En particulier, si f est intégrable sur $[a, b]$ alors les sommes

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

convergent toutes deux vers $S(f, \sigma)$ (de même que leur consœur $\displaystyle\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$).

Définition 7.14. Soient $a < b$ deux réels. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit continue et admette une limite à droite en a_i et une limite à gauche en a_{i+1} (autrement dit, il existe une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ qui coïncide avec f sur $]a_i, a_{i+1}[$).

Comme premiers exemples, notons qu'une fonction continue sur $[a, b]$ est bien sûr continue par morceaux, et qu'une fonction en escalier est également continue par morceaux.

Exercice 7.15. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Montrer que f est bornée.

Dans la suite, on va se contenter d'étudier les propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux, qui est bien définie comme le montre le théorème suivant.

Théorème 7.16. *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.*

i. longueur algébrique : elle pourrait être négative si $f(x_i) < 0$...

Démonstration. On ne va rédiger la preuve que dans le cas où f est continue.

Fixons $\varepsilon > 0$. Grâce au théorème de Heine, on peut trouver $\delta > 0$ témoignant du fait que f est uniformément continue :

$$\forall x, y \in [a,b]\ |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \ .$$

Soit maintenant $\sigma = (a_0, \ldots, a_n; x_1, \ldots, x_n)$, $\tau = (a'_0, \ldots, a'_m; x'_1, \ldots, x'_m)$ deux subdivisions pointées de $[a,b]$ de pas $\le \frac{\delta}{2}$, et f_σ une fonction en escalier égale à $f(x_i)$ sur chaque $[a_{i-1}, a_i[$, f_τ une fonction en escalier égale à $f(x'_i)$ sur chaque $[a'_{i-1}, a'_i[$. On pose aussi $f_\sigma(b) = f_\tau(b) = f(b)$. Rappelons qu'on a par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier les égalités

$$S(f,\sigma) = \int_a^b f_\sigma(x)dx \quad \text{ et } \quad S(f,\tau) = \int_a^b f_\tau(x)dx \ .$$

Pour $x \in [a,b[$, il existe un unique i tel que $x \in [a_{i-1}, a_i[$, et $f_\sigma(x) = f(a_i)$; et un unique j tel que $x \in [a'_{j-1}, a'_j[$ tel que $f_\tau(x) = f(a'_j)$. Puisque les pas de σ et τ sont tous deux inférieurs à $\frac{\delta}{2}$, on a $|x - a_i| \le \frac{\delta}{2}$ et $|x - a'_j| \le \frac{\delta}{2}$, d'où $|a_i - a'_j| \le \delta$. Ceci impose que

$$|f_\sigma(x) - f_\tau(x)| = |f(a_i) - f(a'_j)| \le \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\left| \int_a^b f_\sigma(x) - f_\tau(x) \right| \le \int_a^b |f_\sigma(x) - f_\tau(x)| dx \le \int_a^b \varepsilon dx \le \varepsilon(b-a) \ .$$

(Ci-dessus, on a appliqué l'inégalité triangulaire à l'intégrale de la fonction en escalier $f_\sigma - f_\tau$). Autrement dit,

$$|S(f,\sigma) - S(f,\tau)| \le \varepsilon(b-a) \ .$$

On vient de montrer que, si σ et τ sont des subdivisions de pas suffisamment petit, $S(f,\sigma)$ et $S(f,\tau)$ deviennent arbitrairement proches. Montrons que ceci entraîne l'intégrabilité de f : si f n'est pas intégrable, alors il existe une suite de subdivsions pointées (σ_i) dont le pas tend vers 0 et qui ne converge pas. Mais f est bornée, disons $|f(x)| \le M$ pour tout $x \in [a,b]$, et on en déduit

$$|S(f,\sigma_i)| \le M(b-a) \ .$$

Par conséquent, on peut utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass pour trouver une première suite strictement croissante (i_k) telle que $S(f, \sigma_{i_k})$ converge vers $l \in \mathbb{R}$; et comme on a supposé que $S(f,\sigma_i)$ ne converge pas, on peut trouver une autre suite (j_k) strictement croissante et telle que $S(f,\sigma_{j_k})$ converge vers $l' \neq l$. Mais alors, σ_{i_k} et σ_{j_k} sont deux suites de permutations pointées, dont le pas tend vers 0, et telles que $S(f,\sigma_{i_k}) - S(f,\sigma_{j_k})$ tend vers $l - l' \neq 0$, une contradiction avec ce qu'on a démontré au début de la preuve. □

On a maintenant une méthode pour calculer des intégrales, mais elle n'est pas très pratique ! Essayons de calculer quelques intégrales de fonction continues en passant par des sommes de Riemann :

$$\int_0^1 x\, dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

Essayons un autre calcul : comment calculer $\int_0^\pi \sin(x)dx$? On doit calculer la limite de

$$S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \ .$$

A priori, ce n'est pas facile ! Mais on ne se laisse pas décourager ; il est parfois plus facile de passer par les nombres complexes, et on peut reconnaître que S_n est la partie imaginaire de

$$U_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\frac{\pi}{n}} \ .$$

Ici on peut reconnaître la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\frac{\pi}{n}}$, et on obtient

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{\pi}{n}\frac{1-e^{\frac{in\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{2\pi}{n(1-e^{i\frac{\pi}{n}})} \end{aligned}$$

Si on forme la partie imaginaire de U_n, on obtient la formule

$$S_n = \frac{2\pi\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right))^2 + (\sin\left(\frac{\pi}{n}\right))^2} \ .$$

La limite de S_n n'est pas facile à calculer avec les outils dont on dispose pour le moment ! En trichant un peu, on peut reconnaître que

$$n\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}-1}{\pi} = -\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}-e^{i.0}}{\frac{\pi}{n}-0}$$

est un taux d'accroissement entre 0 et $\frac{\pi}{n}$ de la fonction $x \mapsto e^{ix}$ et doit donc tendre vers $(e^{ix})'(0) = i$ quand x tend vers 0 ; on en déduit que (U_n) tend vers $\frac{-2}{i} = 2i$, et donc que sa partie imaginaire S_n tend vers 2. On en conclut finalement que

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = 2 \ .$$

On vient de souffrir un peu, et de passer par des limites de suites de nombres complexes, pour calculer l'intégrale de $\sin(x)$ entre 0 et π : on a besoin d'une méthode plus efficace ! Bien sûr, vous en connaissez une : passer par le calcul de primitives ! Mais on n'est pas encore tout à fait équipé pour faire le lien entre intgégration et primitives, qu'on va établir dans la prochaine section.

Avant de passer à cette section, notons que souvent on utilise les sens de Riemann en sens inverse de ce qu'on a fait ci-dessus : on les utilise pour calculer la limite de certaines suites ; par exemple, si l'on sait calculer $\int_0^\pi \sin(x)dx$, le lien avec les sommes de Riemann rend immédiat le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2 \ .$$

7.3 Propriétés fondamentales de l'intégrale

Notation. Soient $a > b$ deux réels, et $f\colon [b,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. On pose aussi $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Proposition 7.17. — *Soient a, b, c trois réels et f une fonction continue par morceaux sur un intervalle qui contient a,b et c. Alors on a* **(Relation de Chasles)**

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \ .$$

— *Etant donnés deux réels $a < b$ et une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs positives, $\int_a^b f \geq 0$* **(positivité de l'intégrale)***.*

— *Etant donnés deux réels $a < b$, deux fonctions f, g continue par morceauxs sur $[a,b]$ et deux constantes α, β, on a* **(linéarité de l'intégrale)** *:*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx \ .$$

— *Etant donnés deux réels $a < b$, et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, on a* **(inégalité triangulaire)**

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \ .$$

Toutes ces propriétés se déduisent facilement à partir de la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux et des propriétés analogues pour l'intégrale d'une fonction en escalier ; leur vérification est laissée en exercice.

Théorème 7.18. *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors on a*

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f(x)\,dx \ .$$

Si f est de plus supposée continue, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$.

Notons que l'inf et le sup dans le théorème ci-dessus sont bien définis puisqu'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est nécessairement bornée.

Démonstration. Par définition d'un inf et d'un sup, on a, pour tout $x \in [a,b]$, $\inf_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit

$$\int_a^b \inf_{[a,b]} f\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \sup_{[a,b]} f\,dx \ .$$

Ceci prouve l'inégalité désirée. Si maintenant f est continue sur $[a,b]$, alors l'inf et le sup sont un min et un max puisqu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint ses bornes sur cet intervalle. Appelons m le minimum de f sur $[a,b]$ et M le maximum de f sur $[a,b]$. On a alors $f([a,b]) = [m,M]$ par le théorème des valeurs intermédiaires, et l'inégalité ci-dessus donne

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M \ .$$

Ceci achève la démonstration. □

Théorème 7.19. *Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs positives. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ si, et seulement si, f est nulle partout sauf peut-être en un nombre fini de points de $[a,b]$.*

Démonstration. Si f est continue par morceaux et nulle partout sauf peut-être en a et en b, alors il suit de la définition de l'intégrale que $\int_a^b f(x)dx = 0$; et si f est nulle sauf peut-être en $a_1 < a_2 < \ldots, < a_n$ alors on peut utiliser la relation de Chasles pour écrire

$$\int_a^b f()dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \ldots + \int_{a_n}^b f(x)dx = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0 \ .$$

Réciproquement, supposons f d'intégrale nulle. Commençons par le cas où f est continue ; si f prend une valeur strictement positive en $x_0 \in [a,b]$, alors il existe un intervalle $[c,d] \subseteq [a,b]$ avec $c < d$ sur lequel f est à valeurs strictement positives, donc le minimum de f sur $[c,d]$ est strictement positif, et le théorème précédent nous permet de conclure que $\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx > 0$; la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale nous donnent alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx > 0 \ .$$

On vient de montrer que, si f est continue, à valeurs positives et prend une valeur non nulle, alors son intégrale est strictement positive ; autrement dit, si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ et f est continue à valeurs positives sur $[a,b]$ alors f est la fonction nulle.

Reste le cas où f n'est que supposée continue par morceaux : alors il existe $a_1 < \ldots < a_n$ avec $a_1 = a$, $a_n = b$ tels que f coïncide sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ avec une fonction f_i qui se prolonge continûment à $[a_i, a_{i+1}]$, et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(x)\,dx \ .$$

Par positivité de l'intégrale, si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ alors on doit avoir $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(x)\,dx = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$; comme les f_i sont continues on en déduit que chaque f_i est nulle sur $[a_i, a_{i+1}]$. Par conséquent, f est nulle partout sauf peut-être en $a_1, \dots, a_n$. □

Le théorème suivant peut s'avérer très utile pour comprendre le comportement des intégrales de produits de fonctions, en particulier lorsqu'on étudie des *intégrales généralisées* (ce qu'on ne fera pas ce semestre !).

Théorème 7.20 (Première formule de la moyenne)**.** *Soient $a < b$ deux réels, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et à valeurs positives. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Démonstration. Comme g est continue par morceaux et à valeurs positives, l'intégrale de g ne peut valoir 0 que si g est nulle partout sauf peut-être en un nombre fini de points, auquel cas il en va de même de fg, dont l'intégrale est donc nulle elle aussi. Par conséquent, tout $c \in [a,b]$ est tel que $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ dans ce cas (très) particulier.

On peut donc supposer que $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, auquel cas on doit montrer qu'il existe c tel que

$$\frac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\ .$$

Comme f est continue sur $[a,b]$, l'image de $[a,b]$ par f est un intervalle $[m,M]$ (où m est le minimum de f sur $[a,b]$ et M son maximum), et l'existence d'un c comme ci-dessus est équivalente à l'inégalité

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M$$

Autrement dit, il nous suffit de démontrer que

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Comme g est à valeurs positives, on a pour tout $x \in [a,b]$ $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, et on obtient l'inégalité désirée par positivité et linéarité de l'intégrale.

□

Théorème 7.21. *Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ est continue sur $[a,b]$.*

Démonstration. Une fonction continue par morceaux est nécessairement bornée, autrement dit il existe M tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$. On a alors, pour tout $s,t \in [a,b]$:

$$|F(t) - F(s)| = \left|\int_s^t f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_s^t |f(x)|\,dx\right| \leq M|t-s|\ .$$

En particulier, $F(s)$ tend vers $F(t)$ quand s tend vers t, donc F est continue sur $[a,b]$ [ii] □

Il serait tentant de penser que la fonction F définie ci-dessus est toujours dérivable, et que $F' = f$. C'est faux en général : le théorème de Darboux nous dit qu'une fonction dérivée doit vérifier la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires (i.e. l'image d'un intervalle par une fonction dérivée est un intervalle) donc une fonction en escalier non constante ne peut jamais être une dérivée. Il existe néanmoins un cas essentiel où ce résultat est vrai.

ii. On vient en fait de montrer que F est *lipschitzienne* sur $[a,b]$.

Théorème 7.22 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soient $a < b$ deux réels, f une fonction continue sur $[a,b]$, et F la fonction définie sur $[a,b]$ par $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$. Alors F est dérivable sur $[a,b]$, $F' = f$, et F est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a.*

Démonstration. Commençons par montrer que $F' = f$; pour cela, fixons $t \in [a,b]$. Pour tout $s \in [a,b]$, on a :

$$F(t) - F(s) - (t-s)f(t) = \int_s^t f(x)\,dx - \int_s^t f(t)\,dx = \int_s^t (f(x) - f(t))\,dx \ .$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en t, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $s \in [a,b]$, on ait

$$|t-s| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon \ .$$

Notons que si $|t-s| \leq \delta$ alors $|t-x| \leq \delta$ pour tout x appartenant au segment d'extrémités t et s. Par conséquent, $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x appartenant à ce segment, et l'inégalité triangulaire nous donne, pour tout s tel que $|t-s| \leq \delta$:

$$\left| \int_s^t (f(x) - f(t))\,dx \right| \leq \varepsilon |t-s| \ .$$

On obtient donc finalement, pour tout $s \in [a,b]$ tel que $|t-s| \leq \delta$, que

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t-s} - f(t) \right| \leq \varepsilon \ .$$

Ceci prouve que $\lim_{s \to t} \frac{F(s)-F(t)}{s-t} = f(t)$, autrement dit que F est dérivable en t et $F'(t) = f(t)$.

Si maintenant G est une autre primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a, alors $(G-F)' = 0$, donc l'égalité des accroissements finis appliquée à $G - F$ (qui est continue et dérivable sur $[a,b]$) entraîne que $G - F$ est constante sur $[a,b]$. Comme $G(a) = F(a) = 0$ par hypothèse, on obtient bien que $G(x) = F(x)$ pour tout x de $[a,b]$. □

Exercice 7.23. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse, donner une nouvelle démonstration du théorème 7.19.

On peut maintenant se rappeler de notre technique habituelle pour calculer des intégrales : utiliser les primitives (technique qui ne marche, hélas, pas toujours : parfois on ne connaît pas de primitive de la fonction qu'on souhaite intégrer !).

Corollaire 7.24. Soient $a < b$ deux réels, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors on a $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

On note souvent $[F]_a^b$ la quantité $F(b) - F(a)$.

Démonstration. Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors $F - F(a)$ est encore une primitive de f sur $[a,b]$, par conséquent le théorème précédent nous donne que, pour tout $t \in [a,b]$, on a $F(t) - F(a) = \int_a^t f(x)\,dx$. On obtient le résultat désiré en appliquant cette formule pour $t = b$. □

Corollaire 7.25 (Formule d'intégration par parties)**.** Soient $a < b$ deux réels et $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors on a

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \ .$$

Démonstration. On utilise la formule $(fg)' = f'g + g'f$. Comme $f'g + g'f$ est continue, et a pour primitive fg, on peut lui appliquer le résultat précédent et obtenir (par linéarité de l'intégrale)

$$[fg]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \ .$$

C'est la formule qu'on souhaitait démontrer. □

A titre d'exemple, utilisons une intégration par parties pour déterminer une primitive de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, par exemple la primitive F qui s'annule en 1 : pour $x > 0$ on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \ln(t)dt \\ &= [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1dt \\ &= x\ln(x) - x + 1 \end{aligned}$$

On voit ainsi que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln, ce qu'on vérifie facilement en dérivant :

$$\forall x > 0 \quad (x\ln(x) - x)' = \ln(x) + x\frac{1}{x} - 1 = \ln(x) \ .$$

Un autre exemple : essayons de trouver une primitive de $x\arctan(x)$. En dérivant arctan et en intégrant x (toutes les fonctions en jeu sont $\mathcal{C}^\infty$ et on peut donc bien intégrer par parties) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^x t\arctan(t)dt &= \left[\arctan(t)\frac{t^2}{2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2(1+t^2)}dt \\ &= \frac{x^2}{2\arctan(x)} - \frac{1}{2}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= \frac{1+x^2}{2\arctan(x)} - \frac{x}{2} \ . \end{aligned}$$

Le fait que, pour intégrer $\frac{t^2}{1+t^2}$, on ait eu besoin de décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples, n'est pas un hasard : c'est toujours comme cela qu'on intègrera les fractions rationnelles.

Corollaire 7.26 (Formule de changement de variables)**.** Soient $a < b, c < d$ quatre réels, f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe C^1 sur $[c,d]$ et telle que $\varphi([c,d]) \subseteq [a,b]$. Alors on a

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx \ .$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors, par la formule de dérivation des fonctions composées, $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$ sur $[c,d]$, et le théorème fondamental de l'analyse nous permet d'écrire :

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = [F\circ\varphi]_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx \ .$$

□

Il est **très important**, pour la formule de changement de variables écrite ci-dessus, que f soit continue et que φ soit de classe C^1. Il n'est pas nécessaire, par contre, que φ soit une bijection de $[c,d]$ sur son image. Souvent, on applique la formule ci-dessus en « partant de la droite vers la gauche », i.e. on veut poser $x = \varphi(t)$. Il est alors un peu délicat de trouver les bonnes bornes pour l'intégrale de gauche, sauf dans le cas où φ est une bijection. Ce cas particulier est particulièrement utile en pratique.

Corollaire 7.27 (Cas particulier de la formule de changement de variables)**.** Soient $a < b, c < d$ quatre réels, f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et φ une bijection de classe C^1 de $[c,d]$ sur $[a,b]$. Alors on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \ .$$

Un autre intérêt de la formule ci-dessus est qu'elle se généralise au cas où f est continue par morceaux et aux intégrales de fonctions de plusieurs variables.

On verra quelques exemples dans la dernière section de ce chapitre ; pour l'instant, utilisons un changement de variables pour calculer l'aire d'un disque de centre 0 et de rayon $R > 0$. Ce disque est délimité par les courbes

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$ et $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ pour $x \in [-R, R]$, donc son aire A est égale à $2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$. On utilise le changement de variables de classe $\mathcal{C}^1$ $x = R\cos(\theta)$, où $\theta \in [0, \pi]$; $\varphi\colon [0, \pi] \to [-R, R]$ est une bijection, on a $\varphi^{-1}(-R) = \pi$, $\varphi^{-1}(R) = 0$,et $\varphi'(\theta) = -R\sin(\theta)$.

La formule du changement de variable nous donne donc

$$\begin{aligned}
A &= 2\int_{\pi}^{0} \sqrt{R^2 - R^2\cos^2(\theta)}(-R\sin(\theta))d\theta \\
&= 2\int_{0}^{\pi} (R\sin(\theta))(R\sin(\theta))d\theta \\
&= 2R^2 \int_0^{\pi} \sin^2(\theta)d\theta \\
&= 2R^2 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta \\
&= R^2 \left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi} \\
&= \pi R^2 \ .
\end{aligned}$$

7.4 Intégration de fonctions à valeurs complexes

Définition 7.28. Soit $a < b$ deux réels et $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est *intégrable* sur $[a, b]$ si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont toutes deux intégrables, et dans ce cas on pose

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)dx + i\int_a^b Im(f)(x)dx \ .$$

En particulier, si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont toutes deux continues par morceaux, on peut intégrer f sur $[a, b]$. La raison pour laquelle on souhaite parfois intégrer des fonctions à valeurs complexes dans ce cours est qu'elles peuvent nous permettre de simplifier des calculs d'intégrales de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 7.29 (Théorème fondamental de l'analyse pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$)**.** *Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ est telle que $\mathrm{Im}(f)$ et $Re(f)$ sont toutes deux continues, et qu'on définit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $F\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ est dérivable et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.*

Pour démontrer ce résultat, il suffit de l'appliquer à la fois à la partie réelle et à la partie imaginaire de f. Il nous est utile pour les calculs : grâce à lui, les théorèmes que nous avons démontré à partir du théorème fondamental de l'analyse, en particulier la formule d'intégration par parties et la formule du changement de variables, restent vrais pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

7.5 Quelques calculs de primitives et d'intégrales

Quelques exemples

On utilise souvent des intégrations par parties pour établir des relations de récurrence entre suites d'intégrales, par exemple considérons $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. En intégrant par partie (toutes les fonctions impliquées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$) on a pour tout $n \geq 1$ que

$$I_n = [x^n e^x]_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x = e - nI_{n-1} \ .$$

il est clair que $I_0 = [e^x]_0^1 = e - 1$; on en déduit de proche en proche (écrire une formule pour I_n serait un bon exercice !) que

$$I_1 = e - (e-1) = 1; \quad I_2 = e - 2 \quad \text{etc.}$$

De la même façon, calculons $I = \displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \sin(t)dt$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} t^2 \sin(t) \\
&= \left[-t^2 \cos(t)\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} t\cos(t)dt \\
&= 2\pi^2 + 2\left(\left[t\sin(t)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(t)dt\right) \\
&= 2\pi^2 - 2
\end{aligned}$$

Passer par les complexes est parfois utile, en particulier pour calculer une intégrale d'une fonction de la forme $e^{ax}\cos(bx)$ ou $e^{ax}\sin(bx)$; par exemple, calculons $\int_0^t e^x \cos(x)$ [iii] : c'est la partie réelle de

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^x e^{ix} dx &= \int_0^t e^{(1+i)x} dx \\
&= \frac{1}{1+i}\left[e^{(1+i)x}\right]_0^t \\
&= \frac{e^{(1+i)t} - 1}{1+i} \\
&= \frac{(e^{(1+i)t} - 1)(1-i)}{2} \\
&= \frac{e^t\cos(t) - 1 + e^t \sin(t) + i(e^t\sin(t) - e^t\cos(t)) + 1}{2}
\end{aligned}$$

On vient d'obtenir

$$\int_0^t \cos(x)e^x dx = \frac{e^t\cos(t) - 1 + e^t\sin(t)}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^t e^x \sin(x)dx = \frac{e^t\sin(t) - e^t\cos(t) + 1}{2}$$

Exercice 7.30. A l'aide de deux intégrations par parties bien choisies, trouver la valeur de $\int_0^t e^x\cos(x)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Quand une intégrale paraît compliquée à calculer, on peut parfois essayer de la simplifier à l'aide d'un changement de variables ; par exemple, calculons

$$I = \int_1^e \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx \ .$$

La fonction intégrée est continue, et on essaye le changement de variables $\mathcal{C}^1$ $\varphi(x) = \ln(x)$; autrement dit on pose $u = \ln(x)$, $du = \frac{dx}{x}$, et on obtient

$$I = \int_0^1 \cos(u)du = \sin(1) \ .$$

(On aurait aussi pu reconnaître tout de suite qu'on intégrait la dérivée de $\sin(\ln(t))$!)

Polynômes trigonométriques

Quand on doit intégrer un polynôme en $\sin, \cos$, on se retrouve face à une somme d'intégrales de la forme $\displaystyle\int \cos^n(x)\sin^m(x)$. Le cas le plus sympathique est quand m ou n est impair ; si par exemple $m = 2k+1$, on écrit $\sin^m(x) = \sin^{2k}(x)\sin(x) = (1-\cos^2(x))^k \sin(x)$, et on est en situation pour utiliser le changement de variables

iii. qui pourrait aussi se calculer à l'aide de deux intégrations par parties...

de classe $\mathcal{C}^1$ $u = \cos(x)$. De même, si n est impair on peut utiliser le changement de variables $u = \cos(x)$. Par exemple, calculons

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sin^7(x)\cos^{12}(x)dx &= \int_0^t (1-\cos^2(x))^3\cos^{12}(x)(\sin(x)dx) \\
&= \int_1^{\cos(t)} (1-u^2)^3u^{12}(-du) \\
&= \int_{\cos(t)}^1 (1-3u^2+3u^4-u^6)u^{12}du \\
&= \left[\frac{u^{13}}{13}-\frac{3u^{15}}{15}+\frac{3u^{17}}{17}-\frac{u^{19}}{19}\right]_{\cos(t)}^1 \\
&= \frac{1}{13}-\frac{1}{5}+\frac{3}{17}-\frac{1}{19}-\frac{\cos^{13}(t)}{13}+\frac{\cos^{15}(t)}{15}-\frac{3\cos^{17}(t)}{17}+\frac{\cos^{19}(t)}{19} \\
&= \frac{16}{20995}-\frac{\cos^{13}(t)}{13}+\frac{\cos^{15}(t)}{15}-\frac{3\cos^{17}(t)}{17}+\frac{\cos^{19}(t)}{19}
\end{aligned}$$

Notons que, si l'on est intéressé par le calcul d'une primitive, le calcul de la constante $\frac{16}{20995}$ ci-dessus est parfaitement inutile.

Le cas le plus pénible est celui où n et m sont pairs ; il faut alors arriver à linéariser $\cos^n(x)\sin^m(x)$, par exemple en passant par les nombres complexes. A titre d'exemple, calculons

$$\begin{aligned}
\int_0^t \cos^4(x)dx &= \int_0^t \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 dx \\
&= \int_0^t \frac{e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}dx \\
&= \int_0^t \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6}{16}dx \\
&= \int_0^t \frac{2\cos(4x)+8\cos(2x)+6}{16}dx \\
&= \frac{\sin(4t)}{32}+\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{3t}{8}\ .
\end{aligned}$$

Fractions rationnelles

Pour trouver des primitives de fractions rationnelles, on commence par décomposer en éléments simples, puis on intègre séparément chacun des éléments simples. Un seul type d'élément simple est difficile à intégrer : $\dfrac{1}{P(X)^n}$, où P est un polynôme de degré 2 sans racine réelles. Modulo le fait d'écrire P sous forme canonique, et de faire un changement de variables affine, on a simplement besoin d'intégrer $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$. Pour $n=1$ on connaît une primite (arctan). Pour $n>1$, c'est plus difficile ! Une façon de faire est d'utiliser le changement de variable (de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif) $x = \tan(u)$, pour obtenir

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^n}dx &= \int_0^{\arctan(t)} \frac{1}{(1+\tan^2(u))^n}(1+\tan^2(u))du \\
&= \int_0^{\arctan(t)} \frac{1}{(1+\tan^2(u))^{n-1}}du \\
&= \int_0^{\arctan(t)} \cos^{2n-2}(u)du\ .
\end{aligned}$$

On est ainsi ramené au calcul d'une primitive de $\cos^{2n-2}$, qu'on peut mener à bien en linéarisant comme on a vu à la section précédente.

Par exemple, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= \int_0^{\arctan(t)} \cos^2(u)du \\ &= \int_0^{\arctan(t)} \frac{\cos(2u)+1}{2}du \\ &= \frac{\sin(2\arctan(t)}{4} + \frac{\arctan(t)}{2} \\ &= \frac{\sin(\arctan(t)\cos(\arctan(t)+\arctan(t)}{2} \ .\end{aligned}$$

On n'a pas fini : il nous reste à simplifier les expressions $\sin(\arctan(t))$ et $\cos(\arctan(t))$. Pour se faire, on peut (on doit ?) se rappeler que $\cos^2(u) = \dfrac{1}{1+\tan^2(u)}$, qui nous donne

$$\cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+t^2}$$

et donc (puisque $\cos(\arctan(t))$ est positif : cos est positif sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$) $\cos(\arctan(t)) = \sqrt{\dfrac{1}{1+t^2}}$. On a donc

$$\sin^2(\arctan(t)) = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{d'où} \quad \sin(\arctan(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(en effet $\sin(\arctan(t))$ est du même signe que t). Finalement, on arrive à

$$\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan(t)}{2} \ .$$

Exercice 7.31. En utlisant la relation

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

et une intégration par parties bien choisie, retrouver la formule donnant une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

Un autre exemple : déterminons une primitive sur $]-\infty,1[$ ou sur $]1,+\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$. On commence par écrire

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{(X-1)(X^2+x+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}$$

Pour calculer a on évalue en 1 :

$$a = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

Pour calculer b et c on pourrait multiplier par $(X-j)$ (où $j=e^{2i\pi/3}$) et évaluer en j ; ou évaluer en 0 pour obtenir $-1=-a+c$ et donc $c=-\dfrac{2}{3}$, puis utiliser que la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{x^3-1}$ vaut 0 pour arriver à $0=a+b$ donc $b=-\dfrac{1}{3}$. Finalement, on doit donc calculer une primitive de

$$x \mapsto \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right) \ .$$

Sur $]1,+\infty[$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est $x \mapsto \ln(x-1)$, et une primitive de $x \mapsto \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$.

Modulo les constantes multiplications, il nous reste à intégrer

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+x+1)} &= \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{4}{3}\frac{1}{1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2}\\ &= \frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2}\end{aligned}$$

On reconnaît (?) la dérivée de $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\dfrac{2}{\sqrt{3}}(x+\dfrac{1}{2}))$

Finalement, une primitive de notre fonction sur $]1,+\infty[$ est

$$x \mapsto \frac{1}{3}\left(\ln(x-1) - \ln(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) .$$

Exercice 7.32. A l'aide d'une intégration par parties et d'une intégrale de fraction rationnelle, déterminer une primitive de $x \mapsto x\arctan(x)$.

Fractions rationnelles trigonométriques

Cette fois-ci, on essaie d'intégrer des fonctions de la forme $F(t) = \dfrac{P(\sin(t),\cos(t))}{Q(\sin(t),\cos(t))}$ où P et Q sont des polynômes. On peut toujours se ramener à une intégrale de fraction rationnelle, via l'application des *règles de Bioche* :

- — Si $F(t)dt$ est laissé inchangé par le changement de variables $u = -t$ (autrement dit si F est impaire) alors on pose $u = \cos(t)$.
- — Si $F(t)dt$ est laissé inchangé par le changement de variables $u = \pi - t$, alors on pose $u = \sin(t)$.
- — Si $F(t)$ est laissé inchangé par le changement de variables $u = \pi + t$, alors on pose $u = \tan(t)$ (en se restreignant à un intervalle où ce changement de variables a un sens : il faut que tan soit définie sur tout l'intervalle d'intégration !).
- — Si aucun des points précédents n'est vérifié, alors on pose $u = \tan(\frac{t}{2})$ (sur un intervalle où le changement de variables a un sens, et en se rendant compte que le calcul risque d'être long...)

Exercice 7.33. Exprimer $\sin(t)$ et $\cos(t)$ en fonction de $\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ (on pourra commencer par démontrer que $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$)

Contentons-nous de traiter un exemple : déterminons une primitive de $f\colon x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$, qui est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur ne s'annule jamais. Les règles de Bioche et les formules $\cos(\pi+t) = -\cos(t)$, $\sin(\pi+t) = -\sin(t)$ nous disent que, puisque $f(t)dt$ est laissé invariant par le changement de variables $u = \pi + t$, on peut essayer de poser $u = \tan(t)$; ceci sur un intervalle où tan est bien définie, par exemple $I =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (on utilisera ensuite la périodicité de la fonction pour trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ tout entier à partir d'une primitive sur I). Ensuite, on écrit que

$$\begin{aligned}\frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} &= \frac{dt}{\cos^4(t)(1+\tan^4(t)}\\ &= \frac{dt}{\cos^2(t)}\frac{1}{\cos^2(t)}\frac{1}{1+\tan^4(t)}\\ &= \frac{dt}{\cos^2(t)}\frac{1+\tan^2(t)}{1+\tan^4(t)}\\ &= \frac{1+u^2}{1+u^4}du\end{aligned}$$

Le changement de variables $u = \tan(t)$ nous amène donc à la formule, pour $x \in I$:

$$\int_0^x \frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} = \int_0^{\tan(x)} \frac{1+u^2}{1+u^4}du .$$

Là on est un peu désespéré de devoir décomposer en éléments simples $\frac{1+X^2}{1+X^4}$, mais on ne se laisse pas abattre et on écrit

$$\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{X^2+1}{(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)} = \frac{aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1} .$$

Pour calculer a, b, c, d on peut passer par les complexes en évaluant en $e^{i\pi/4}$ (recommandé !) et utiliser la parité de la fonction pour voir que $a = c$, évaluer en 0 pour déduire que $b + d = 1$; ou simplement remarquer que

$$\begin{aligned}\frac{1+X^2}{(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)} &= \frac{1}{2}\frac{(X^2+\sqrt{2}X+1)+(X^2-\sqrt{2}X+1)}{(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{1}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right)\end{aligned}$$

Une fois qu'on a décomposé en éléments simples, il nous reste à trouver les primitives, qui s'obtiennent à partir des formes canoniques :

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1} &= \frac{1}{(X+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{1+(\sqrt{2}X+1)^2}\end{aligned}$$

Donc une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{u^2+\sqrt{2}u+1}$ est $\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u+1)$; de même une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{u^2-\sqrt{2}u+1}$ est $-\sqrt{2}\arctan(-\sqrt{2}u+1)$. Finalement, on arrive à la formule

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} &= \int_0^{\tan(x)} \frac{1+u^2}{1+u^4}du \\ &= \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2+\sqrt{2}u+1} + \frac{1}{u^2-\sqrt{2}u+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u+1) - \sqrt{2}\arctan(-\sqrt{2}u+1)\right]_0^{\tan(x)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\arctan(1+\sqrt{2}\tan(x)) - \arctan(1-\sqrt{2}\tan(x))\Big)\end{aligned}$$

Après ces quelques menus efforts, nous avons établi qu'une primitive de $f\colon x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$ sur l'intervalle $I = -]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $F\colon x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\arctan(1+\sqrt{2}\tan(x)) - \arctan(1-\sqrt{2}\tan(x))\big)$. Notons qu'une primitive de fonction continue et π-périodique sur $\mathbb{R}$ doit être continue et π-périodique sur $\mathbb{R}$; par conséquent F doit avoir une limite en $\pm\frac{\pi}{2}$ (savez-vous la calculer ?) et on a en fait trouvé une formule valable sur $\mathbb{R}$ tout entier (modulo les prolongements par continuité en $k\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$).