

Notons que cette fonction est continue en 0 : comme $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$ pour tout $x > 0$, on a bien

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Manifestement, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$ et sa dérivée en un point $x \neq 0$ est égale à $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Notons que $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0^+ (pourquoi?). Cela ne signifie pas, a priori, que f n'est pas dérivable en 0! Pour décider si elle est dérivable, on forme le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On conclut que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 : f est bien dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. Mais f' n'est pas continue en 0.

6.3 Théorème de Rolle et des accroissements finis.

Définition 6.20. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $a \in I$ est un :

- *maximum* de f sur I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq f(a)$;
- *minimum* de f sur I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f(a)$;
- *extremum* de f sur I si a est un minimum ou un maximum de f sur I .

Définition 6.21. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que a est un :

- *maximum local* de f sur I s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ on ait

$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

- *minimum local* de f sur I s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ on ait

$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

- *extremum local* de f sur I si a est un minimum local ou un maximum local de f sur I .

Proposition 6.22. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x un extremum local de f . Si f est dérivable en x alors on doit avoir $f'(x) = 0$.

Démonstration. Supposons que $x \in I$ est tel que $f'(x) \neq 0$, et montrons que x ne peut être un extremum local pour f . Supposons par exemple $f'(x) > 0$. Comme $f'(x)$ est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ quand y tend vers x , celui-ci doit être > 0 pour y suffisamment proche de x , autrement dit :

$$\exists \delta > 0 \forall y \in I \ 0 < |y - x| \leq \delta \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0.$$

Par conséquent, pour tout $y \in I$ tel que $0 < y - x \leq \delta$, on a $f(y) > f(x)$, ce qui montre que x n'est pas un maximum local de f ; et pour tout $y \in I$ tel que $-\delta \leq y - x < 0$, on a $f(y) < f(x)$ donc x n'est pas non plus un minimum local.

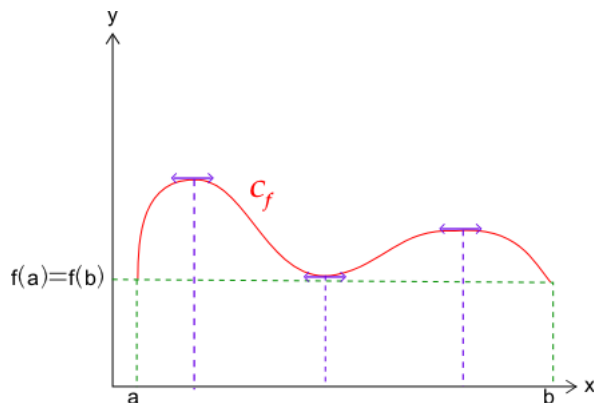
Le cas $f'(x) < 0$ se traite de la même façon, ou se déduit en appliquant ce qu'on vient de démontrer à $-f$. \square

Notons par contre que la condition $f'(x) = 0$ n'est pas suffisante pour conclure que x est un extremum local de f ! Par exemple, si on considère la fonction $f: x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local de f . Les développements limités nous permettront bientôt de mieux étudier le comportement local d'une fonction en un point où $f'(x) = 0$.

Théorème 6.23 (Théorème de Rolle). Soit $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si f est constante sur $[a, b]$ il n'y a rien à faire ; sinon, on sait que f admet un maximum M et un minimum m sur $[a, b]$, et au moins l'un des deux doit être différent de $f(a)$. Disons par exemple que $M > f(a)$ et soit $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Alors $f(c)$ est le maximum de f sur $]a, b[$: c est un maximum local de f , donc $f'(c) = 0$. \square

Ci-dessous une imageⁱ illustrant le théorème de Rolle ; sur le dessin il y a trois c satisfaisant l'égalité $f'(c) = 0$.

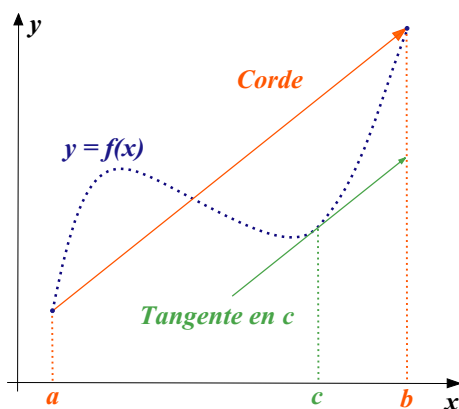


Théorème 6.24 (Égalité des accroissements finis). Soit $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) .$$

Notons que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$ (qu'on appelle une *corde* entre deux points du graphe de f) tandis que $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente en c . Le théorème des accroissements finis nous dit donc que, étant donné une corde reliant deux points sur le graphe de f , on peut trouver quelque part entre ces deux points une tangente au graphe qui est parallèle à la corde en question.

C'est illustré par le dessin suivantⁱⁱ



Démonstration. On considère la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) .$$

Alors g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et on a de plus $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(a)$. Le théorème de Rolle nous dit donc qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 .$$

\square

i. Issue de l'article Wikipedia sur le théorème de Rolle https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Rolle

ii. version à peine modifiée du dessin figurant sur la page Wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_accroissements_finis

Une application fondamentale de l'égalité des accroissements finis est de nous donner un lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction, qui justifie l'utilisation de la dérivée pour dresser des tableaux de variations.

Proposition 6.25. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f est croissante sur I si, et seulement si, on a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$; et f est décroissante sur I si, et seulement si, on a $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$. De plus, si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors f est strictement croissante, et si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ alors f est strictement décroissante.*

Démonstration. Si f est croissante et dérivable sur I , alors pour tout $x \in I$ et tout $y \neq x$ on a $f(y) - f(x)$ est du même signe que $y - x$, et donc

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

est une limite de nombres positifs donc $f'(x) \geq 0$. Réciproquement, si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ alors considérons $x < y \in I$. Par l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) .$$

On voit donc que $f(y) \geq f(x)$: f est croissante; et si on avait supposé $f'(x) > 0$ sur I alors on aurait déduit $f(y) > f(x)$ dès que $y > x$, c'est-à-dire que f est strictement croissante.

Le cas des fonctions décroissantes se traite de la même façon, ou se déduit du cas des fonctions croissantes en remplaçant f par $-f$. \square

On voit aussi que si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ alors f est constante; et, pour conclure que f est strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, l'égalité des accroissements finis nous dit qu'il suffit de vérifier que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Citons une autre conséquence fréquemment utilisée de l'égalité des accroissements finis.

Proposition 6.26. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si de plus $x \in I$ est tel que f est dérivable sur $I \setminus \{x\}$, et $\lim_{y \rightarrow x, y \neq x} f'(y) = l$ existe dans \mathbb{R} , alors f est dérivable en x et $f'(x) = l$.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite d'éléments de I , différents de x , qui converge vers x . Alors pour tout n , l'égalité des accroissements finis nous assure de l'existence de $c_n \in]x, y_n[$ tel que $f(x) - f(y_n) = (x - y_n)f'(c_n)$. De plus, par hypothèse, $f'(c_n)$ converge vers l . Mais alors

$$\frac{f(x) - f(y_n)}{x - y_n} = f'(c_n) \rightarrow l .$$

Autrement dit, on a comme espéré, puisque la suite (y_n) était quelconque :

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = l .$$

\square

Souvent, pour étudier des fonctions et calculer des limites, on a besoin d'établir des inégalités. L'égalité des accroissements finis (et sa généralisation, la *formule de Taylor-Lagrange*, qu'on verra plus tard dans ce cours) nous fournit une méthode utile.

Théorème 6.27 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $I = [a, b]$ un segment de \mathbb{R} , et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $k = \sup_{c \in]a, b[} |f'(c)| < +\infty$, alors pour tout $x, y \in [a, b]$ on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| .$$

Démonstration. Soit $x < y \in I$. On peut appliquer l'égalité des accroissements finis sur $[x, y]$ et obtenir $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Par définition de k on a $|f'(c)| \leq k$, et donc aussi $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. \square

Notons ici un point important : quand on étudie des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^n , on peut généraliser la notion de dérivée (en dérivant chaque coordonnée séparément ; ci-dessous on va brièvement parler du cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$) et l'*inégalité* des accroissements finis se généralise à ce contexte, alors que l'*égalité* des accroissements finis ne s'y généralise pas ! Un autre fait que vous verrez peut-être un jour est que l'inégalité des accroissements finis reste vraie même sous des hypothèses plus faibles sur f , où on ne demande pas que f soit dérivable sur $[a, b]$ tout entier.

Exercice 6.28. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leq x$.

Notons que les fonctions dérivées partagent des propriétés des fonctions continues, même si elles ne le sont pas nécessairement (plus haut dans ces notes on a vu un exemple de fonction dérivée dont la dérivée n'était pas une fonction continue).

Théorème 6.29 (Théorème de Darboux). *Les fonctions dérivées satisfont la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires : si I est un intervalle de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I , alors $f'(I)$ est un intervalle.*

En particulier, si une dérivée ne s'annule pas, elle ne peut pas changer de signe, et la fonction étudiée est strictement monotone.

Démonstration. Soit $a < b \in I$ et λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$; on doit trouver c dans I tel que $f'(c) = \lambda$. Quitte à remplacer f par $-f$ on suppose $f'(a) > \lambda > f'(b)$. En remplaçant f par $x \mapsto f(x) - \lambda x$ on se ramène au cas où $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$ et on cherche c tel que $f'(c) = 0$. Comme $f'(a) > 0$, $f(x) > f(a)$ pour $x > a$ suffisamment proche de a , et donc a n'est pas un maximum de f sur $[a, b]$; de même, comme $f'(b) < 0$ on sait que b n'est pas un maximum de f sur $[a, b]$. Mais f , étant continue sur le segment $[a, b]$, doit y admettre un maximum c , qui appartient à $]a, b[$ par ce qui précède et est donc un maximum local de f : d'où $f'(c) = 0$, et on a trouvé le c qu'on cherchait. \square

6.4 Fonctions circulaires réciproques et leurs dérivées

Proposition 6.30. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement monotone sur I et dérivable en $x \in I$. Alors $f(I) = J$ est un intervalle, f est une bijection de I sur J , et $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue sur J et dérivable en $f(x)$ si et seulement si $f'(x) \neq 0$. Dans ce cas on a la formule*

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} .$$

En particulier, si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est une bijection de I sur J , la fonction réciproque de f est dérivable sur J et pour tout $y \in J$ on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} .$$

Démonstration. Soit f une fonction satisfaisant les conditions ci-dessus. On sait déjà par 6.6 que $f(I) = J$ est un intervalle, f est une bijection de I sur J et $g = f^{-1}$ est continue sur J . Reste à comprendre quand g est dérivable en $f(x)$ et calculer le cas échéant la valeur de $g'(x)$. Pour cela, on considère une suite (y_n) d'éléments de J qui converge vers $y = f(x)$ avec $y_n \neq y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on cherche à déterminer la limite de $\frac{g(y_n) - g(y)}{y_n - y}$. On sait que la suite $g(y_n)$ converge vers $g(y) = x$ puisque g est continue ; puisque f est dérivable en x , on peut écrire

$$f(g(y_n)) = f(x) + (g(y_n) - x)f'(x) + (g(y_n) - x)\varepsilon(g(y_n)) ,$$

où $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui tend vers 0 en x . Puisque $f(g(y_n)) = y_n$ et $x = g(y)$, on obtient en définissant ε' sur J par $\varepsilon'(z) = \varepsilon(g(z))$ que

$$y_n = y + (g(y_n) - g(y))f'(x) + (g(y_n) - g(y))\varepsilon'(y_n) .$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y}{g(y_n) - g(y)} = f'(x) .$$

Autrement dit,

$$\lim_{z \rightarrow y} \frac{z - y}{g(z) - g(y)} = f'(x) .$$

On voit donc que la limite en y du taux d'accroissement $\frac{g(z) - g(y)}{z - y}$ existe si et seulement si $f'(x) \neq 0$, et vaut $\frac{1}{f'(x)}$ dans ce cas. □

La fonction arcsin.

En utilisant le fait que $\cos(x) > 0$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\sin' = \cos$, on obtient le tableau de variations suivant pour la fonction sin sur cet intervalle :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	+	1	+
$\sin(x)$	-1	0	1

On voit que la fonction sin réalise une bijection, strictement croissante, de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque, notée arcsin, définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a l'équivalence suivante :

$$(\sin(x) = t) \Leftrightarrow (x = \arcsin(t)) .$$

En particulier, puisque la fonction sin est impaire, on a pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ que

$$\begin{aligned} \arcsin(t) = x &\Leftrightarrow \sin(x) = t \\ &\Leftrightarrow \sin(-x) = -t \\ &\Leftrightarrow -x = \arcsin(-t) . \end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction arcsin est impaire. Puisque $\sin' = \cos$ ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, arcsin est dérivable sur $\sin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[=]-1, 1[$ et on a

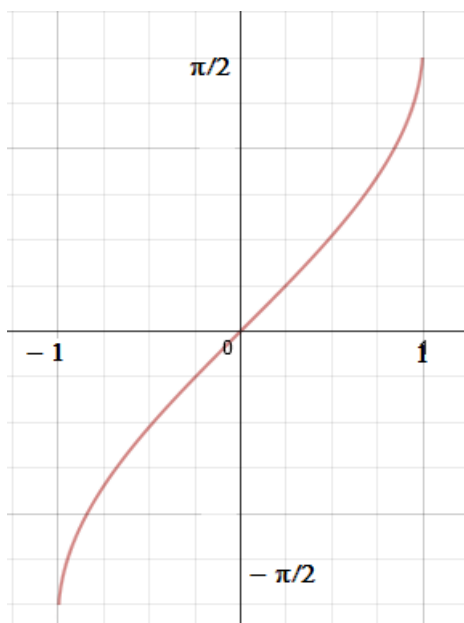
$$\forall t \in]-1, 1[\quad \arcsin'(t) = \frac{1}{\cos(\arcsin(t))} .$$

Cette expression se simplifie : pour $t \in [-1, 1]$, en notant $x = \arcsin(t)$, on sait que $\sin(x) = t$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(x) \geq 0$, et $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\cos^2(x) + t^2 = 1$. On vient de montrer que $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1 - t^2}$ pour tout $t \in [-1, 1]$, et on a donc la formule

$$\forall t \in]-1, 1[\quad \arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} .$$

Ci-dessous, le tableau de variation et le graphe de arcsin sur $[-1, 1]$.

x	-1	0	1
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		+	+
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



La fonction arccos.

De la même façon, on obtient le tableau de variation suivant pour la fonction cos sur $[0, \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin(x)$		-	-1
$\cos(x)$	1	0	-1

On peut donc définir la bijection réciproque arccos: $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ (attention à l'ensemble d'arrivée de arccos!). De la formule $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ on déduit la relation

$$\forall t \in [-1, 1] \quad \arccos(-t) = \pi - \arccos(t) .$$

Comme précédemment, à partir de la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et du fait que $\sin(\arccos(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$ on déduit la relation $\sin(\arccos(t)) = \sqrt{1 - t^2}$ pour tout $t \in [-1, 1]$; et on obtient que la fonction arccos est dérivable sur $] - 1, 1[$, avec

$$\forall t \in] - 1, 1[\quad \arccos'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} .$$

Vous avez peut-être remarqué que $\arccos'(t) + \arcsin'(t) = 0$ sur $] - 1, 1[$, ce qui entraîne que la fonction $\arccos + \arcsin$ est constante; comme $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(0) = 0$, cette constante vaut $\frac{\pi}{2}$ et on vient d'établir la relation suivante :

$$\forall t \in [-1, 1] \quad \arccos(t) + \arcsin(t) = \frac{\pi}{2} .$$

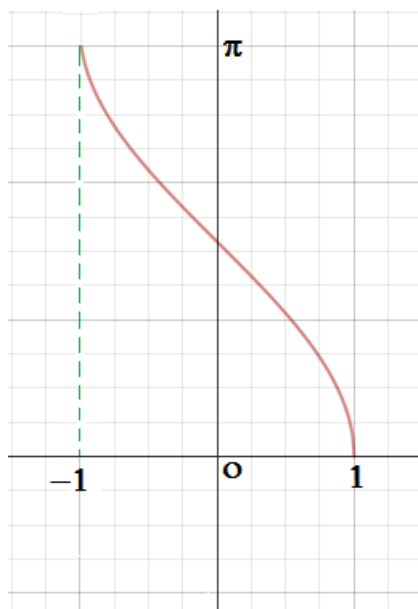
Cette relation peut bien sûr se démontrer en utilisant des formules de trigonométrie : soit $t \in [-1, 1]$ et $x = \arcsin(t)$. Alors $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{2} - x \in [0, \pi]$. Et on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) = t .$$

On obtient donc comme attendu $\frac{\pi}{2} - x = \arccos(t)$, autrement dit $\frac{\pi}{2} - \arcsin(t) = \arccos(t)$.

Ci-dessous, le tableau de variation et le graphe de arccos sur $[0, \pi]$.

x	-1	0	1
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	-	-1	-
$\arccos(x)$	π	1	0



La fonction arctan

La fonction circulaire réciproque qui joue le rôle le plus important dans les exercices est la réciproque de la fonction \tan ; c'est lié à la formule pour sa dérivée qu'on va obtenir ci-dessous. Pour l'instant, rappelons-nous que la fonction \tan est définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que sur cet intervalle on a

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) .$$

La fonction \tan est donc strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, de plus elle est impaire, et sa limite en $-\frac{\pi}{2}$ vaut $-\infty$ tandis que sa limite en $\frac{\pi}{2}$ vaut $+\infty$. On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$1+\tan^2(x)$	+	1	+
$\tan(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

La fonction réciproque arctan réalise donc une bijection (strictement croissante) de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} ; pour $t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence

$$(\tan(x) = t) \Leftrightarrow (x = \arctan(t)) .$$

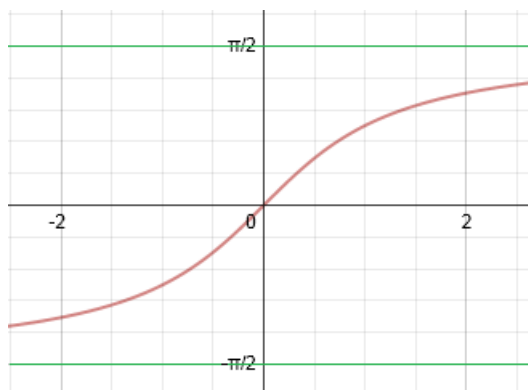
À partir de cette relation et de l'imparité de \tan , on déduit que arctan est impaire ; et elle est strictement croissante puisque \tan l'est. On peut calculer sa dérivée sans difficulté : pour tout $t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\arctan'(t) = \frac{1}{\tan'(\arctan(t))} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(t)))^2} = \frac{1}{1 + t^2} .$$

Notons que la dérivée de arctan est une fraction rationnelle, en fait c'est même un élément simple (sur \mathbb{R}) : plus tard, quand on essaiera de calculer des primitives de fractions rationnelles, la fonction arctan jouera un rôle important...

Ci-dessous, le graphe et le tableau de variations de arctan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{1+x^2}$	+	1	+
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



6.5 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 6.31. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est k fois dérivable sur I , et sa dérivée k -ième $f^{(k)}$ est continue sur I , on dit que f est de classe \mathcal{C}^k sur I . Par convention, si f est continue sur I on dit que f est de classe \mathcal{C}^0 sur I ; si jamais f est de classe \mathcal{C}^k sur I pour tout entier k alors on dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

Par convention, on note $f^{(0)} = f$; notons que $(f^{(k)})' = (f')^{(k)} = f^{(k+1)}$. Attention, le fait que f soit k fois dérivable sur I n'est pas suffisant pour conclure que f est de classe \mathcal{C}^k : il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas continue...

Proposition 6.32. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $k \geq 1$ un entier, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I . Alors fg et $f + g$ sont de classe \mathcal{C}^k ; de plus on a les formules

- $(\lambda f + g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + g^{(k)}$.
- $(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}$.

En particulier, les sommes et les produits de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sont encore \mathcal{C}^∞ ; on retrouve ainsi le fait que toute fonction polynôme est de classe \mathcal{C}^∞ .

Démonstration. Ces deux formules se démontrent par récurrence; la première est très facile à montrer et on laisse la preuve en exercice. Montrons la deuxième propriété; elle est bien vraie pour $k = 1$: si f, g sont de classe \mathcal{C}^1 sur I alors fg est dérivable sur I , et sa dérivée $f'g + g'f$ est continue. Supposons la propriété vraie au rang k et considérons f, g deux fonctions de classe \mathcal{C}^{k+1} sur I . Alors f et g sont en particulier de classe \mathcal{C}^k , et on a par hypothèse de récurrence que

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}.$$

Chaque fonction $f^{(j)}g^{(k-j)}$ est un produit de fonctions de classe (au moins) \mathcal{C}^1 , et est donc de classe \mathcal{C}^1 ; en dérivant terme à terme on obtient que $(fg)^{(k)}$ est dérivable, de dérivée

$$\begin{aligned} (fg)^{(k+1)} &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(f^{(j+1)}g^{(k-j)} + f^{(j)}g^{(k+1-j)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} f^{(j)}g^{(k+1-j)} + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}g^{(k+1-j)} \\ &= f^{(k+1)}g + \sum_{j=1}^k \left(\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} \right) f^{(j)}g^{(k+1-j)} + f^{(k+1)}g \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} f^{(j)}g^{(k-j)}. \end{aligned}$$

□

Proposition 6.33. Soit $k \geq 1$ un entier, I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $g(I) \subseteq J$ et f, g sont de classe \mathcal{C}^k . Alors la fonction composée $f \circ g$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .

Ce résultat entraîne qu'une composée de fonctions \mathcal{C}^∞ est encore \mathcal{C}^∞ . Avec les outils dont on dispose, cette propriété est assez pénible à montrer : la formule (dite formule de Faà di Bruno) qui exprime la dérivée k -ième d'une fonction composée est assez délicate à écrire, ce qui rend pénible une preuve par récurrence sur le modèle de ce qu'on a fait pour les produits. Quand vous saurez calculer des différentielles de fonctions entre espaces vectoriels normés (pas ce semestre!), une preuve plus simple vous sera accessible... Nous allons nous contenter d'admettre ce résultat, et de noter deux conséquences.

Corollaire 6.34. 1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $k \geq 1$ un entier et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^k ne s'annulant pas sur I . Alors $\frac{1}{f}$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .

2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $k \geq 1$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^k telle que f' ne s'annule pas sur I . Alors f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, et sa bijection réciproque est de classe \mathcal{C}^k .

Par conséquent, si f est de classe \mathcal{C}^∞ et ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I . Le deuxième point ci-dessus nous permet de retrouver le fait que arcsin et arccos sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$ et arctan est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (ce qui se voyait directement sur la formule donnant leurs dérivées)

Démonstration. Pour démontrer le premier point, on écrit simplement que $\frac{1}{f}$ est obtenue en composant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et f . Pour le deuxième point, on sait sous les hypothèses ci-dessus que f doit être strictement monotone (le théorème de Darboux nous assure que f' ne change pas de signe), et que $f(I) = J$ est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires. On sait alors que f^{-1} est dérivable sur J et que

$$\forall x \in J \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Ceci nous montre que $(f^{-1})'$ est \mathcal{C}^1 si f est \mathcal{C}^1 ; ensuite on raisonne encore par récurrence sur k , on suppose que la propriété qu'on souhaite démontrer est vraie au rang k et que f est une fonction de classe \mathcal{C}^{k+1} satisfaisant les conditions ci-dessus. Par la proposition précédente, $f' \circ f^{-1}$ est de classe \mathcal{C}^k puisque c'est la composée de deux fonctions de classe \mathcal{C}^k . Donc $(f^{-1})'$ est de classe \mathcal{C}^k en tant qu'inverse d'une fonction de classe \mathcal{C}^k qui ne s'annule pas sur J ; autrement dit f^{-1} est de classe \mathcal{C}^{k+1} . □

6.6 Dériver des fonctions à valeurs dans \mathbb{C}

Dans le chapitre suivant, on va calculer des intégrales; pour cela, il est parfois pratique d'intégrer des fonctions à valeurs complexes (le plus souvent, une fonction comme $t \mapsto e^{it}$); il est utile d'avoir pris le temps de parler de la dérivée d'une fonction à valeurs dans \mathbb{C} .

Définition 6.35. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Si sa partie réelle $\operatorname{Re}(f)$ et sa partie imaginaire $\operatorname{Im}(f)$ sont toutes deux dérivables en $x \in I$, alors on dit que f est dérivable en $x \in I$ et on pose

$$f'(x) = \operatorname{Re}(f)'(x) + i\operatorname{Im}(f)'(x) .$$

Notons que l'on pourrait définir la notion de limite d'une fonction à valeurs complexes (il suffit de remplacer la valeur absolue par un module dans la définition d'une limite); et alors $f'(x)$ est simplement la limite du taux d'accroissement $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ quand y tend vers x . Dans ce cours on se contente de mentionner ce dont on a besoin pour simplifier certains calculs d'intégrales.

Proposition 6.36. Si I est un intervalle de \mathbb{R} et $f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions dérivables sur I alors $sf g$ est dérivable sur I et on a

$$\forall x \in I \quad (fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) .$$

Démonstration. Notons f_1, g_1 les parties réelles de f, g et f_2, g_2 leurs parties imaginaires. Alors on a

$$\forall x \in I \quad f(x)g(x) = (f_1(x)g_1(x) - f_2(x)g_2(x)) + i(f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)) .$$

On déduit des théorèmes sur les fonctions dérivables à valeurs dans \mathbb{R} que la partie réelle et la partie imaginaire de fg sont toutes deux dérivables sur I , donc fg est dérivable sur I , et de plus on a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= (f_1'(x)g_1(x) + f_1(x)g_1'(x) - f_2'(x)g_2(x) - f_2(x)g_2'(x)) + i(f_1'(x)g_2(x) + f_1(x)g_2'(x) + f_2'(x)g_1(x) + f_2(x)g_1'(x)) \\ &= (f_1'(x) + if_2'(x))(g_1(x) + ig_2(x)) + (f_1(x) + if_2(x))(g_1'(x) + ig_2'(x)) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) . \end{aligned}$$

□

Sur le même modèle, on vérifie que les théorèmes sur les dérivations de quotients et de fonctions composées se généralisent mot pour mot aux fonctions à valeurs complexes. Notons en particulier le fait suivant : si I est un intervalle de \mathbb{R} , et $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable, alors $x \mapsto e^{f(x)}$ est une fonction dérivable à valeurs dans \mathbb{C} , et sa dérivée vaut $f'(x)e^{f(x)}$. Souvent, on utilisera simplement que si $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $x \mapsto e^{\alpha x}$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $\alpha e^{\alpha x}$.

Finissons ce chapitre en mentionnant de nouveau que l'égalité des accroissements finis ne se généralise pas aux fonctions à valeurs dans \mathbb{C} : par exemple, considérons la fonction $f: x \mapsto e^{ix}$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée ie^{ix} ; en particulier $|f'(x)| = 1$ pour tout x et donc f' ne s'annule pas. Pourtant, $f(0) = f(2\pi) = 1$; il ne peut pas exister de c tel que $f(2\pi) - f(0) = 0 = 2\pi f'(c)$.