Autrement dit,

$$\lim_{z\to y} \frac{z-y}{g(z)-g(y)} = f'(x)\ .$$

On voit donc que la limite en $y$ du taux d'accroissement $\dfrac{g(z)-g(y)}{z-y}$ existe si et seulement si $f'(x) \neq 0$, et vaut $\dfrac{1}{f'(x)}$ dans ce cas. $\square$

**La fonction** arcsin**.**

En utilisant le fait que $\cos(x) > 0$ pour tout $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\sin' = \cos$, on obtient le tableau de variations suivant pour la fonction sin sur cet intervalle :

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(x)$ | | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $\sin(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

On voit que la fonction sin réalise une bijection, strictement croissante, de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque, notée arcsin, définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a l'équivalence suivante :

$$(\sin(x) = t) \Leftrightarrow (x = \arcsin(t))\ .$$

En particulier, puisque la fonction sin est impaire, on a pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ que

$$\begin{aligned}
\arcsin(t) = x &\Leftrightarrow \sin(x) = t \\
&\Leftrightarrow \sin(-x) = -t \\
&\Leftrightarrow -x = \arcsin(-t)\ .
\end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction arcsin est impaire. Puisque $\sin' = \cos$ ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, arcsin est dérivable sur $\sin\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) = ]-1, 1[$ et on a

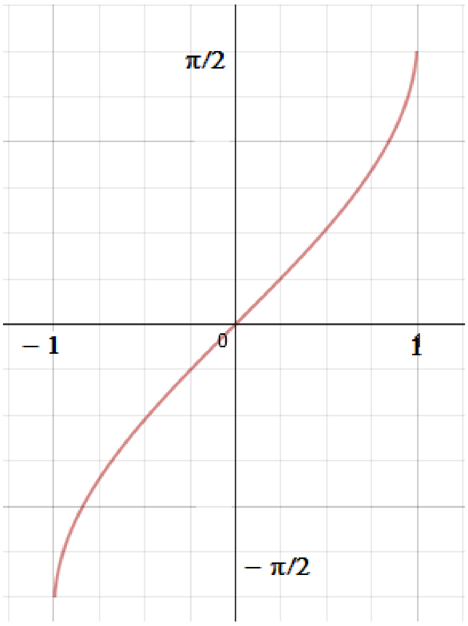
$$\forall t \in ]-1, 1[ \quad \arcsin'(t) = \frac{1}{\cos(\arcsin(t))}\ .$$

Cette expression se simplifie : pour $t \in [-1, 1]$, en notant $x = \arcsin(t)$, on sait que $\sin(x) = t$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(x) \geq 0$, et $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\cos^2(x) + t^2 = 1$. On vient de montrer que $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2}$ pour tout $t \in [-1, 1]$, et on a donc la formule

$$\forall t \in ]-1, 1[ \quad \arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ .$$

Ci-dessous, le tableau de variation et le graphe de arcsin sur $[-1, 1]$.

| $x$ | -1 | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\Vert$ | $+$ | $1$ | $+$ | $\Vert$ |
| $\arcsin(x)$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |




**La fonction** arccos**.**

De la même façon, on obtient le tableau de variation suivant pour la fonction cos sur $[0, \pi]$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\sin(x)$ | | $-$ | $-1$ | $-$ | |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | -1 |

On peut donc définir la bijection réciproque $\arccos \colon [-1,1] \to [0,\pi]$ (attention à l'ensemble d'arrivée de arccos !). De la formule $\cos(\pi - x) = \cos(x)$ on déduit la relation

$$\forall t \in [-1,1] \quad \arccos(-t) = \pi - \arccos(t) \ .$$

Comme précédemment, à partir de la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et du fait que $\sin(\arccos(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [-1,1]$ on déduit la relation $\sin(\arccos(t)) = \sqrt{1-t^2}$ pour tout $t \in [-1,1]$ ; et on obtient que la fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$, avec

$$\forall t \in ]-1,1[ \quad \arccos'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ .$$

Vous avez peut-être remarqué que $\arccos'(t) + \arcsin'(t) = 0$ sur $]-1,1[$, ce qui entraîne que la fonction $\arccos + \arcsin$ est constante ; comme $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(0) = 0$, cette constante vaut $\frac{\pi}{2}$ et on vient d'établir la relation suivante :

$$\forall t \in [-1,1] \ \arccos(t) + \arcsin(t) = \frac{\pi}{2} \ .$$

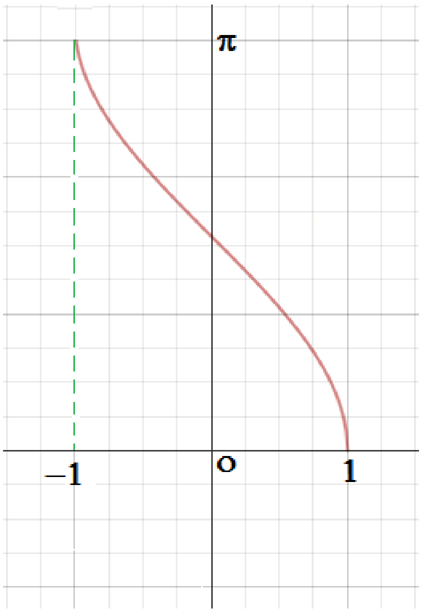
Cette relation peut bien sûr se démontrer en utilisant des formules de trigonométrie : soit $t \in [-1,1]$ et $x = \arcsin(t)$. Alors $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{2} - x \in [0,\pi]$. Et on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) = t \ .$$

On obtient donc comme attendu $\frac{\pi}{2} - x = \arccos(t)$, autrement dit $\frac{\pi}{2} - \arcsin(t) = \arccos(t)$.

Ci-dessous, le tableau de variation et le graphe de arccos sur $[0, \pi]$.

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\|\|$ | $-$ | $-1$ | $-$ | $\|\|$ |
| $\arccos(x)$ | $\pi$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |




**La fonction** arctan

La fonction circulaire réciproque qui joue le rôle le plus important dans les exercices est la réciproque de la fonction tan ; c'est lié à la formule pour sa dérivée qu'on va obtenir ci-dessous. Pour l'instant, rappelons-nous que la fonction tan est définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et que sur cet intervalle on a

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)\ .$$

La fonction tan est donc strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, de plus elle est impaire, et sa limite en $-\frac{\pi}{2}$ vaut $-\infty$ tandis que sa limite en $\frac{\pi}{2}$ vaut $+\infty$. On obtient le tableau de variations suivant.

| $x$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1+\tan^2(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $1$ | $+$ | $\|\|$ |
| $\tan(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

La fonction réciproque arctan réalise donc une bijection (strictement croissante) de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ ; pour $t \in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $x \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence

$$(\tan(x) = t) \Leftrightarrow (x = \arctan(t))\ .$$

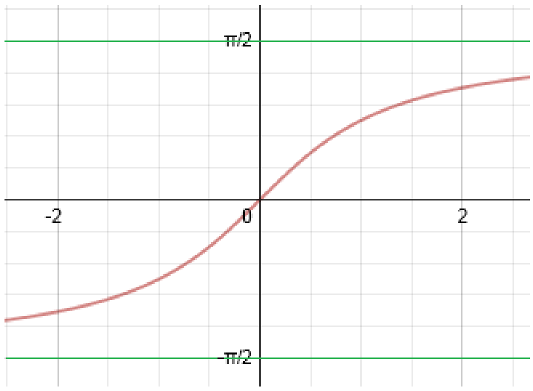
À partir de cette relation et de l'imparité de tan, on déduit que arctan est impaire ; et elle est strictement croissante puisque tan l'est. On peut calculer sa dérivée sans difficulté : pour tout $t \in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a

$$\arctan'(t) = \frac{1}{\tan'(\arctan(t))} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(t)))^2} = \frac{1}{1+t^2}\ .$$

Notons que la dérivée de arctan est une fraction rationnelle, en fait c'est même un élément simple (sur $\mathbb{R}$) : plus tard, quand on essaiera de calculer des primitives de fractions rationnelles, la fonction arctan jouera un rôle important...

Ci-dessous, le graphe et le tableau de variations de arctan sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1+x^2}$ | | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $\arctan(x)$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |




## 6.5 Dérivées d'ordre supérieur

**Définition 6.31.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f$ est $k$ fois dérivable sur $I$, et sa dérivée $k$-ième $f^{(k)}$ est continue sur $I$ , on dit que $f$ est *de classe* $\mathcal{C}^k$ sur $I$. Par convention, si $f$ est continue sur $I$ on dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $I$ ; si jamais $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ pour tout entier $k$ alors on dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Par convention, on note $f^{(0)} = f$ ; notons que $(f^{(k)})' = (f')^{(k)} = f^{(k+1)}$. Attention, le fait que $f$ soit $k$ fois dérivable sur $I$ n'est pas suffisant pour conclure que $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ : il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas continue...

**Proposition 6.32.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \geq 1$ un entier, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f,g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$. Alors $fg$ et $f+g$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ ; de plus on a les formules*
- $(\lambda f + g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + g^{(k)}$.
- $(fg)^{(k)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}$.

En particulier, les sommes et les produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont encore $\mathcal{C}^\infty$ ; on retrouve ainsi le fait que toute fonction polynôme est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

*Démonstration.* Ces deux formules se démontrent par récurrence ; la première est très facile à montrer et on laisse la preuve en exercice. Montrons la deuxième propriété ; elle est bien vraie pour $k=1$ : si $f,g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ alors $fg$ est dérivable sur $I$, et sa dérivée $f'g + g'f$ est continue. Supposons la propriété vraie au rang $k$ et considérons $f,g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $I$. Alors $f$ et $g$ sont en particulier de classe $\mathcal{C}^k$, et on a par hypothèse de récurrence que

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)} \ .$$

Chaque fonction $f^{(j)}g^{(k-j)}$ est un produit de fonctions de classe (au moins) $\mathcal{C}^1$, et est donc de classe $\mathcal{C}^1$ ; en dérivant terme à terme on obtient que $(fg)^{(k)}$ est dérivable, de dérivée

$$\begin{aligned}(fg)^{(k+1)} &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(f^{(j+1)}g^{(k-j)} + f^{(j)}g^{(k+1-j)}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} f^{(j)}g^{(k+1-j)} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)}g^{(k+1-j)} \\ &= f^{(k+1)}g + \sum_{j=1}^{k} \left(\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}\right) f^{(j)}g^{(k+1-j)} + fg^{(k+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} f^{(j)}g^{(k-j)} \ .\end{aligned}$$

□

**Proposition 6.33.** *Soit $k \geq 1$ un entier, $I$, $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \colon J \to \mathbb{R}$ et $g \colon I \to \mathbb{R}$ telles que $g(I) \subseteq J$ et $f, g$ sont de classe $\mathcal{C}^k$. Alors la fonction composée $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$.*

Ce résultat entraîne qu'une composée de fonctions $C^\infty$ est encore $C^\infty$. Avec les outils dont on dispose, cette propriété est assez pénible à montrer : la formule (dite formule de Faà di Bruno) qui exprime la dérivée $k$-ième d'une fonction composée est assez délicate à écrire, ce qui rend pénible une preuve par récurrence sur le modèle de ce qu'on a fait pour les produits. Quand vous saurez calculer des différentielles de fonctions entre espaces vectoriels normés (pas ce semestre !), une preuve plus simple vous sera accessible... Nous allons nous contenter d'admettre ce résultat, et de noter deux conséquences.

**Corollaire 6.34.**

1. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \geq 1$ un entier et $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ne s'annulant pas sur $I$. Alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$.
2. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \geq 1$ et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $f'$ ne s'annule pas sur $I$. Alors $f$ est une bijection de $I$ sur l'intervalle $J = f(I)$, et sa bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^k$.

Par conséquent, si $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annule pas sur $I$, alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$. Le deuxième point ci-dessus nous permet de retrouver le fait que arcsin et arccos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (ce qui se voyait directement sur la formule donnant leurs dérivées)

*Démonstration.* Pour démontrer le premier point, on écrit simplement que $\frac{1}{f}$ est obtenue en composant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $f$. Pour le deuxième point, on sait sous les hypothèses ci-dessus que $f$ doit être strictement monotone (le théorème de Darboux nous assure que $f'$ ne change pas de signe), et que $f(I) = J$ est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires. On sait alors que $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et que

$$\forall x \in J \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \ .$$

Ceci nous montre que $(f^{-1})'$ est $\mathcal{C}^1$ si $f$ est $\mathcal{C}^1$ ; ensuite on raisonne encore par récurrence sur $k$, on suppose que la propriété qu'on souhaite démontrer est vraie au rang $k$ et que $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ satisfaisant les conditions ci-dessus. Par la proposition précédente, $f' \circ f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ puisque c'est la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Donc $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ qui ne s'annule pas sur $J$ ; autrement dit $f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. □

## 6.6 Dériver des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Dans le chapitre suivant, on va calculer des intégrales ; pour cela, il est parfois pratique d'intégrer des fonctions à valeurs complexes (le plus souvent, une fonction comme $t \mapsto e^{it}$) ; il est utile d'avoir pris le temps de parler de la dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

**Définition 6.35.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to \mathbb{C}$ une fonction. Si sa partie réelle $\mathrm{Re}(f)$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(f)$ sont toutes deux dérivables en $x \in I$, alors on dit que $f$ est dérivable en $x \in I$ et on pose

$$f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + i\mathrm{Im}(f)'(x)\ .$$

Notons que l'on pourrait définir la notion de limite d'une fonction à valeurs complexes (il suffit de remplacer la valeur absolue par un module dans la définition d'une limite) ; et alors $f'(x)$ est simplement la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ quand $y$ tend vers $x$. Dans ce cours on se contente de mentionner ce dont on a besoin pour simplifier certains calculs d'intégrales.

**Proposition 6.36.** *Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ sont des fonctions dérivables sur $I$ alor s$fg$ est dérivable sur $I$ et on a*

$$\forall x \in I \quad (fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\ .$$

*Démonstration.* Notons $f_1, g_1$ les parties réelles de $f, g$ et $f_2, g_2$ leurs parties imaginaires. Alors on a

$$\forall x \in I \quad f(x)g(x) = (f_1(x)g_1(x) - f_2(x)g_2(x)) + i(f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x))\ .$$

On déduit des théorèmes sur les fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$ que la partie réelle et la partie imaginaire de $fg$ sont toutes deux dérivables sur $I$, donc $fg$ est dérivable sur $I$, et de plus on a pour tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= (f_1'(x)g_1(x) + f_1(x)g_1'(x) - f_2'(x)g_2(x) - f_2(x)g_2'(x)) + i(f_1'(x)g_2(x) + f_1(x)g_2'(x) + f_2'(x)g_1(x) + f_2(x)g_2'(x))\\ &= (f_1'(x) + if_2'(x))(g_1(x) + ig_2(x)) + (f_1(x) + if_2(x))(g_1'(x) + ig_2'(x))\\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ .\end{aligned}$$

□

Sur le même modèle, on vérifie que les théorèmes sur les dérivations de quotients et de fonctions composées se généralisent mot pour mot aux fonctions à valeurs complexes. Notons en particulier le fait suivant : si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to \mathbb{C}$ est dérivable, alors $x \mapsto e^{f(x)}$ est une fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{C}$, et sa dérivée vaut $f'(x)e^{f(x)}$. Souvent, on utilisera simplement que si $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $x \mapsto e^{\alpha x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\alpha e^{\alpha x}$.

Finissons ce chapitre en mentionnant de nouveau que l'égalité des accroissements finis ne se généralise pas aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ : par exemple, considérons la fonction $f\colon x \mapsto e^{ix}$. Alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $ie^{ix}$ ; en particulier $|f'(x)| = 1$ pour tout $x$ et donc $f'$ ne s'annule pas. Pourtant, $f(0) = f(2\pi) = 1$ ; il ne peut pas exister de $c$ tel que $f(2\pi) - f(0) = 0 = 2\pi f'(c)$.