Chapitre 7

Intégration

7.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 7.1. Soient $a < b$ deux réels. Une *subdivision* de $[a, b]$ est une suite finie $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$ et $a_i < a_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. On définit le *pas* d'une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ comme étant égal à la quantité $\max\{a_{i+1} - a_i \colon i \in \{0, \dots, n-1\}\}$.

Intuitivement, considérer une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ revient à considérer un découpage de $[a, b]$ en n intervalles $[a_0, a_1], \dots, [a_{n-1}, b]$; dire que le pas de la subdivision est petit signifie que tous les intervalles créés lors du découpage sont petits.

Définition 7.2. Soient $a < b$ deux réels, et $(a_0, \dots, a_n)$, $(b_0, \dots, b_m)$ deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que $(b_0, \dots, b_m)$ *raffine* $(a_0, \dots, a_n)$ si chaque intervalle $[b_j, b_{j+1}]$ est contenu dans un invervalle de la forme $[a_k, a_{k+1}]$.

Cela signifie que la subdivision $(b_0, \dots, b_m)$ a été obtenue en découpant les intervalles de la subdivision $(a_0, \dots, a_n)$.

Exercice 7.3. Soient $a < b$ deux réels, et $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_m)$ deux subdivisions de $[a, b]$. Alors il existe une subdivision $(c_0, \dots, c_p)$ qui raffine *à la fois* $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_m)$.

(Indication : $c_0, \dots, c_p$ peuvent par exemple être obtenus en écrivant dans l'ordre croissant l'ensemble $\{a_0, \dots, a_n; b_0, \dots, b_m\}$)

Définition 7.4. Soient $a < b$ deux réels ; $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. On dit que $(a_0, \dots, a_n)$ *témoigne* du fait que f est en escalier, ou encore est une *subdivision adaptée* à f.

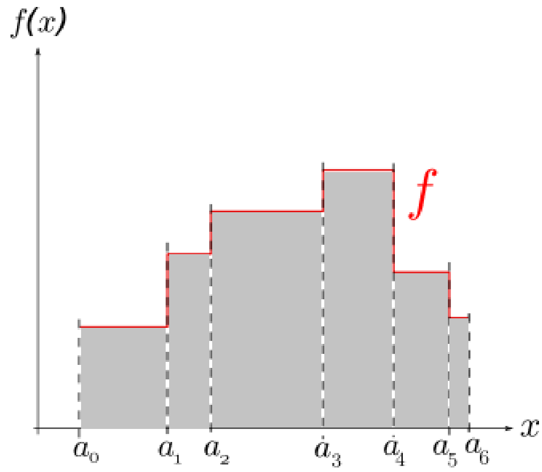
Proposition 7.5.
1. *Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*
2. *Une combinaison linéaire de fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.*
3. *Un produit de fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.*

Démonstration. La première propriété découle immédiatement de la définition. Les preuves des deuxièmes et troisième propriétés sont très similaires, on va simplement montrer la troisième. Soient donc f, g deux fonctions en escalier, $(a_0, \dots, a_n)$ une subdivision qui témoigne du fait que f est en escalier et $(b_0, \dots, b_m)$ une subdivision qui témoigne du fait que g est en escalier. Par l'exercice précédent, on peut trouver une subdivision $(c_0, \dots, c_p)$ qui raffine ces deux subdivisions. Etant donné i entre 0 et $p-1$, il existe j, k tel que $[c_i, c_{i+1}]$ soit contenu dans $[a_j, a_{j+1}]$ et dans $[b_k, b_{k+1}]$. En particulier, les deux fonctions f et g sont constantes sur $]c_i, c_{i+1}[$, donc fg y est constante aussi. Ainsi, la subdivision $(c_0, \dots, c_p)$ témoigne du fait que fg est une fonction en escalier. □

Définition 7.6. Soient $a < b$ deux réels, $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. On pose

$$I(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) .$$

Remarque 7.7. Dans la définition de $I(a,\sigma)$, on aurait pu remplacer $\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$ par n'importe quel point de $]a_k, a_{k+1}[$ sans changer la valeur de $I(a,\sigma)$.



On voit que $I(f,\sigma)$ correspond à l'"aire sous le graphe de f" quand f est à valeurs positives.

Lemme 7.8. *Soient $a < b$ deux réels, $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et σ, τ deux subdivisions adaptées à f. Alors $I(f,\sigma) = I(f,\tau)$.*

Démonstration. Commençons par le cas où $\tau = (b_0,\dots,b_m)$ raffine $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$. Alors il existe $j_0,\dots,j_n$ tels que pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ on ait $b_{j_k} = a_k$ (en particulier $j_0 = 0$, $j_n = m$). Alors on a

$$\begin{aligned}
I(f,\tau) &= \sum_{j=0}^{m-1}(b_{j+1}-b_j)f\left(\frac{b_j+b_{j+1}}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1}(b_{j+1}-b_j)f\left(\frac{b_j+b_{j+1}}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1}(b_{j+1}-b_j)f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)\left(\sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} b_{j+1}-b_j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)(a_{k+1}-a_k) \\
&= I(f,\sigma)\ .
\end{aligned}$$

On a donc démontré le résultat désiré dans le cas où τ raffine σ. Si maintenant τ et σ sont deux subdivisions quelconques adaptées à f, il existe une subdivision γ qui raffine à la fois τ et σ. Cette subdivison est encore adaptée à f, donc par le cas précédent on a $I(f,\sigma) = I(f,\gamma)$ et $I(f,\gamma) = I(f,\tau)$. On en déduit bien que $I(f,\sigma) = I(f,\tau)$. $\square$

Ce lemme nous permet finalement de définir l'intégrale d'une fonction en escalier.

Définition 7.9. Soient $a < b$ deux réels, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et σ une subdivision adaptée à f. On pose

$$\int_a^b f(x)dx = I(f,\sigma)\ .$$

Le lemme précédent nous dit que cette définition est légitime : quelle que soit la subdivision σ adaptée à f que l'on choisisse, $I(f,\sigma)$ a toujours la même valeur.

Répétons quelle est l'intuition derrière cette définition : pour une fonction f à valeurs positives, l'intégrale est censée représenter « l'aire sous la courbe de f ». Dans le cas où f est en escalier et à valeurs positives, le domaine sous la courbe de f est une union finie de rectangles, et la formule que l'on a donnée pour l'intégrale de f correspond à la somme des aires de ces rectangles.

Evidemment, on ne veut pas intégrer que des fonctions en escalier ! Si jamais la partie délimitée par l'axe des abscisses et le graphe de f peut être bien approchée par des unions de rectangles, on peut définir l'aire sous la courbe comme la limite de la somme des aires de ces rectangles ; c'est comme ça qu'on va définir les fonctions intégrables dans la section suivante.

pour étendre la définition de l'intégrale à des fonctions plus générales (et particulièrement pour pouvoir intégrer des fonctions continues !) on a besoin des propriétés suivantes, qui suivent facilement (même si les preuves peuvent être un peu pénibles à écrire...) de la définition de l'intégrale des fonctions en escalier.

Proposition 7.10. *1. Etant donnés deux réels $a < b$, on a $\int_a^b 1dx = b - a$.*

2. Etant donnés deux réels $a < b$ et une fonction f en escalier sur $[a, b]$ et à valeurs positives, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ **(positivité de l'intégrale)***)=.*

3. Etant donnés deux réels $a < b$, deux fonctions f, g en escalier sur $[a, b]$ et deux constantes α, β, on a **(linéarité de l'intégrale)** *:*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\ .$$

4. Etant donnés deux réels $a < b$, et f une fonction en escalier sur $[a, b]$, on a **(inégalité triangulaire)**

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx\ .$$

7.2 Fonctions intégrables

Définition 7.11. Soient $a < b$ deux réels. Une *subdivision pointée* $\sigma = (a_0, \dots, a_n; x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ est la donnée :

— d'une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$;

— de points $x_1, \dots, x_n$ de $[a, b]$ tels que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on ait $x_k \in [a_{k-1}, a_k]$.

Un cas particulier très important en pratique est celui ou l'on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$, et où l'on choisit x_k à gauche de l'intervalle $[a_{k-1}, a_k]$ (c'est-à-dire $x_k = a + (k-1)\frac{b-a}{n}$) ou à droite de cet intervalle ($x_k = a + k\frac{b-a}{n}$)

Définition 7.12. Soit $a < b$ deux réels, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\sigma = (a_0, \dots, a_n; x_1, \dots, x_n)$ une subdivision pointée de $[a, b]$. On appelle *somme de Riemann associée à f et à σ* le nombre

$$S(f, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) f(x_k)\ .$$

Notons que, par définition, $S(f, \sigma)$ est l'intégrale d'une fonction en escalier qui est égale à $f(x_i)$ sur chaque $]a_{i-1}, a_i[$. En particulier, si σ est la subdivision obtenue en découpant $[a, b]$ en n intervalles de même longueur et que x_k est choisi à gauche du k-ième intervalle de la subdivision, on obtient la formule

$$S(f, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\ .$$

De même, quand τ est obtenue en découpant $[a, b]$ en n intervalles de même longueur et que x_k est l'extrémité droite du k-ième intervalle, on a la somme de Riemann

$$S(f, \tau) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\ .$$

Remercions de nouveau Wikipedia pour l'image suivante, qui illustre la définition qu'on vient de donner.