Chapitre 6

Continuité et dérivabilité de fonctions réelles

6.1 Continuité : théorèmes fondamentaux

Définition 6.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x \in I$. On dit que f est *continue en* x si $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$.
On dit que f est continue sur I si elle est continue en x pour tout $x \in I$.
Avec des quantificateurs : f est continue en $x \in I$ si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in I \; |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \; .$$

Comme vous l'avez vu au premier semestre, cette définition se reformule à l'aide de suites.

Proposition 6.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x \in I$. Alors f est continue en x si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui converge vers x on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$.*

En particulier, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, f est une fonction continue de $I \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}$, et $f(x)$ admet une limite quand x tend vers a, alors on peut prolonger f en a en posant

$$f(a) = \lim_{x \to a, x \in I \setminus \{a\}} f(x) \; .$$

La fonction obtenue est continue, et on l'appelle *prolongement par continuité* de f à I.

Exercice 6.3. On reprend les notations ci-dessus. Montrer que le prolongement par continuité de f est bien une fonction continue sur I.

Vous avez vu le résultat suivant au premier semestre, et on laisse sa preuve en exercice.

Proposition 6.4. *Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$.*
- *Si $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues en $x \in I$ alors fg et $f + g$ sont continues en x. Si de plus g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue en x.*
- *Si $g \colon J \to \mathbb{R}$ est continue en $x \in J$, $g(J) \subseteq I$ et $f \colon I \to \mathbb{R}$ est continue en $g(x)$, alors $f \circ g$ est continue en x.*

Théorème 6.5 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. S'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ alors il existe $x \in I$ tel que $f(x) = 0$.*
Plus généralement : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Supposons par exemple qu'il existe $a < b$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (quitte à remplacer f par $-f$ on peut se ramener à ce cas). Alors par continuité de f en a on a $\delta > 0$ tel que $f(y) < 0$ pour tout $y \in [a, a + \delta[$; par conséquent

$$E = \{x > a \colon \forall y \in [a, x[\; f(y) < 0\}$$

est non vide, et majoré par b : il admet une borne supérieure x. Il existe une suite strictement croissante (e_n) d'éléments de E tels que $f(e_n)$ tend vers x ; on a $f(e_n) < 0$ donc $f(x) \leq 0$. Si jamais $f(x) < 0$, alors comme précédemment on sait que par continuité on a $\delta > 0$ tel que $f(x+y) < 0$ pour tout $y < \delta$, par conséquent $x+\delta \in E$, ce qui contredit la définition de x. Donc $f(x) = 0$.

Pour conclure que l'image de I par f est un intervalle, supposons que $x < y$ appartiennent à $f(I)$, et soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $x < z < y$. On peut trouver $a, b \in I$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$; par conséquent, la fonction continue $f - z$ prend une valeur < 0 en a, et > 0 en b : d'après ce qu'on vient de démontrer elle doit donc s'annuler sur I, par conséquent $f(z) \in I$. □

Corollaire 6.6 (Théorème de la bijection)**.** Soit $a < b$ deux réels et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est strictement monotone et continue, alors f réalise une bijection de $[a,b]$ sur l'intervalle fermé J d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. De plus la fonction réciproque f^{-1} est continue sur J.

Démonstration. Supposons par exemple f strictement croissante, et soit alors $J = [f(a), f(b)]$. Puisque $f(a), f(b)$ appartiennent tous deux à l'image de f, qui est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a $J \subseteq f([a,b])$. Réciproquement, si $x \in f([a,b])$ alors il existe $y \in [a,b]$ tel que $f(y) = x$, et puisque f est croissante on a $f(a) \leq x \leq f(b)$, donc $x \in J$.

On vient de montrer que $f([a,b]) = J$, autrement dit f réalise une surjection de $[a,b]$ sur J. Pour montrer qu'elle est aussi injective, considérons $x \neq y \in [a,b]$. Si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$ puisque f est strictement croissante, de même si $y < x$ on a $f(y) < f(x)$. Donc si $x \neq y$ on doit avoir $f(x) \neq f(y)$, autrement dit f est injective.

Reste à montrer que f^{-1} est continue sur J ; soit (y_n) une suite d'élements de J qui converge vers $y \in J$, et $x_n = f^{-1}(y_n)$. Si (x_n) ne converge pas vers $x = f^{-1}(y)$, il existe une sous-suite (x_{n_k}) et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}\ |x_{n_k} - x| \geq \varepsilon\ .$$

Mais comme (x_{n_k}) est une suite d'élements du segment $[a,b]$, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers $x' \in [a,b]$; ceci nous donne une sous-suite (x_{m_k}) de (x_n) qui converge vers x' et telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}\ |x_{m_k} - x| \geq \varepsilon\ .$$

En particulier, $|x' - x| \geq \varepsilon$; mais comme f est continue on a

$$f(x') = \lim_{k \to +\infty} f(x_{m_k}) = \lim_{k \to +\infty} y_{m_k} = y$$

puisque (y_{m_k}) est une sous-suite de la suite (y_n) qui converge vers y. On a donc $f(x') = y = f(x)$ mais $x' \neq x$, ce qui est impossible puisque f est injective. Donc $f^{-1}(y_n)$ converge vers $f^{-1}(y)$, ce qui prouve que f^{-1} est continue sur J. □

La monotonie stricte nous a permis de garantir l'injectivité de f ; cette condition était en fait nécessaire (sous l'hypothèse qu'on travaille avec des fonctions continues !), comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 6.7. Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une application injective et continue. Montrer que f est strictement monotone.

Théorème 6.8. *Soit f une fonction continue sur un segment. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Rappelons qu'un *segment* est un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b \in \mathbb{R}$. En combinaison avec le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème ci-dessus montre que l'image d'un segment par une application continue est encore un segment.

Démonstration. Soit $[a,b]$ un segment et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. On va d'abord montrer que f est majorée et admet un maximum, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(y) \leq f(x)$ pour tout $y \in [a,b]$. Pour cela, notons

$$M = \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\ .$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) qui converge, et sa limite x appartient encore à $[a,b]$. Par continuité de f en x, la suite $f(x_{n_k})$ converge vers $f(x)$; mais puisque c'est une sous-suite d'une suite convergeant vers M, elle converge également vers M : on a $f(x) = M$, ce qui montre à la fois que M est fini et qu'il est atteint.

Pour montrer que f est minorée et admet un minimum, on pourrait suivre le même raisonnement que précédemment en remplaçant $\sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par $\inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; ou bien appliquer à $-f$ le résultat qu'on vient de démontrer. □

Revenons sur la définition d'une fonction continue avec des quantificateurs : f est continue sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in I \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in I \; |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \; .$$

Le point crucial est que δ ci-dessus dépend à la fois de x et de ε. L'ordre des quantificateurs est important !

Exercice 6.9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Disons que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *vraiment très continue* si :

   $$\exists \delta > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in I \; \forall y \in I \; |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \; .$$

   (autrement dit, le même δ marche pour tout ε et pour tout x).
2. Disons que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *assez peu continue* si :

   $$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in I \; \forall y \in I \; \exists \delta > 0 \; |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \; .$$

   (cette fois, δ dépend à la fois de ε, x, et y)

Montrer que les seules fonctions vraiment très continues sur I sont les fonctions constantes ; et que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ est assez peu continue.

Les définitions dans l'exercice ci-dessus ne sont bien sûr pas à retenir et ne sont là que pour illustrer le fait que l'ordre dans lequel les quantificateurs sont écrits est fondamental pour le sens d'un énoncé mathématique ; il faut s'habituer à y faire très attention.

Les énoncés de l'exercice ci-dessus ont été obtenus en bougeant le « $\exists\delta$ »de la définition d'une fonction continue tout à gauche de l'énoncé, ou tout à droite ; une possibilité intermédiaire existe et donne naissance, contrairement à ses consœurs, à une notion mathématique importante.

Définition 6.10. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in I \; |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \; .$$

Autrement dit : δ ne dépend plus que de ε et plus du point x. Manifestement, cette définition est plus forte que celle de la continuité et est en fait, en général, strictement plus forte.

Exemple.

1. La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, si elle l'était, alors (en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la continuité uniforme) on pourrait trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $(x+\delta)^2 - x^2 \leq 1$. Mais pour $x = \frac{1}{\delta}$ on a

   $$(x+\delta)^2 - x^2 = 2\delta x + \delta^2 \geq 2 \; .$$

2. De même, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas continue sur $]0,1]$. En effet, si elle l'était, alors on pourrait comme expliqué ci-dessus trouver $\delta > 0$, qu'on peut supposer plus petit que $\frac{1}{2}$, tel que pour tout $x \in]0,1]$ on ait

   $$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\delta} \leq 1 \; .$$

   Mais pour $x = \delta$ on obtient

   $$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\delta} = \frac{\delta}{x(x+\delta)} = \frac{1}{2\delta} \geq 1 \; .$$

Exercice 6.11. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $x \mapsto P(x)$ soit uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

On voit que, sur un intervalle non borné, même des fonctions très sympathiques comme $x \mapsto x^2$ ne vont pas être uniformément continues ; et qu'une fonction qui a une limite infinie en 0 ne risque pas d'être uniformément continue sur $]0,1]$ (pourquoi ?). En utilisant les mêmes idées, on peut se convaincre que, quand l'intervalle I n'est pas un segment, il y a des fonctions continues sur I qui n'y sont pas uniformément continues. Remarquablement, cela n'arrive pas quand I est un segment.

Théorème 6.12 (Théorème de Heine)**.** *Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur I.*

Démonstration. On va démontrer la contraposée de l'implication ci-dessus, c'est-à-dire qu'on va supposer que f n'est pas uniformément continue sur I et en déduire qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que f n'est pas continue en x. Dire que f n'est pas uniformément continue sur I, c'est affirmer que f a la propriété suivante :

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in I \ |x-y| \leq \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon \ .$$

Fixons ε témoignant que la propriété ci-dessus est vraie ; alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver $x_n, y_n \in I$ tels que

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \ .$$

Comme I est un segment, (x_n) et (y_n) sont en particulier bornées et on a vu en 5.18 qu'il existe des sous-suites (x_{n_k}) et (y_{n_k}) qui convergent toutes les deux, disons vers x, y ; comme I est un segment x, y appartiennent à I. De plus, on sait que $n_k \geq k$ et donc $|x_{n_k} - y_{n_k}|$ tend vers 0 : $x = y$. Si f était continue en x, $(f(x_{n_k}))$ et $(f(y_{n_k}))$ devraient toutes deux converger vers $f(x)$; ce n'est pas le cas puisque $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ ne tend pas vers 0. Par conséquent f n'est pas continue en x et le théorème de Heine est démontré. □

6.2 Dérivabilité

Définition 6.13. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x \in I$. On dit que f est *dérivable* en x si

$$\lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

existe ; dans ce cas on note cette limite $f'(x)$.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en x pour tout $x \in I$.

Notons que, dans la limite ci-dessus, on suppose implicitement que $y \in I$; ainsi, si $I = [a,b]$, quand on regarde si f est dérivable en a on ne regarde que des $y \geq a$, tandis que pour la dérivée en b on ne regarde que des $y \leq b$. Il est parfois plus naturel de ne se préoccuper que de la dérivées de fonctions définies sur un intervalle ouvert ; aux extrémités des intervalles on préférera souvent utiliser la notion de dérivée à gauche ou à droite.

Définition 6.14. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x \in I$. On dit que f est *dérivable à gauche* en x si

$$\lim_{y \to x^-} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

existe ; dans ce cas on note cette limite $f'_g(x)$.

De même, quand la limite

$$\lim_{y \to x^+} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

existe on dit que f est *dérivable à droite* et on note cette limite $f'_d(x)$.

Une autre façon de reformuler la définition de la dérivée : f est dérivable en x de dérivée l si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon \colon I \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in I$ on ait

$$f(y) = f(x) + l(x-y) + (x-y)\varepsilon(y) \text{ et } \lim_{y \to x} \varepsilon(y) = 0 \ .$$

En particulier, $f(y)$ tend vers $f(x)$ quand y tend vers x : si f est dérivable en x alors elle est nécessairement continue en x. La réciproque est fausse : par exemple $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Cela dit, elle y admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, ce n'est donc pas un exemple très convaincant ; en fait, il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de dérivée à droite, ni à gauche, en tout point de $\mathbb{R}$...

Proposition 6.15. *Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $g_n \colon x \mapsto x^n$ (définie sur $\mathbb{R}$ tout entier). Alors :*

1. *Si $n > 0$ alors g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'_n(x) = nx^{n-1}$.*
2. *Si $n < 0$ alors g_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $g'_n(x) = nx^{-1}$.*

Bien sûr, si $n = 0$ la fonction est constante et de dérivée nulle.

Démonstration. Commençons par le cas où $n > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$; d'après la formule du binôme de Newton, on a pour tout h :

$$\begin{aligned}(x+h)^n - x^n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) - x^n \\ &= nhx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\end{aligned}$$

En divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on obtient comme attendu que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} \ .$$

Quand $n = -m$ avec $m > 0$, on considère $x \neq 0$, $h \in \mathbb{R}$ et on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}(x+h)^n - x^n &= \frac{1}{(x+h)^m} - \frac{1}{x^m} \\ &= \frac{x^m - (x+h)^m}{x^m (x+h)^m}\end{aligned}$$

Quand on divise par h et qu'on fait tendre h vers 0, on a vu que le numérateur tend vers $-mx^{m-1}$; et le dénominateur tend vers x^{2m}. On obtient donc l'égalité

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1} \ .$$

□

On retrouve les formules classiques sur la dérivation d'un produit ou d'une composée.

Proposition 6.16. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x \in I$. Alors fg est dérivable, et on a*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ .$$

Par conséquent, si f et g sont dérivables sur I alors fg l'est aussi et $(fg)' = f'g + fg'$.

Démonstration. On a des fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \colon I \to \mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en x et telles que pour tout $y \in I$ on ait

$$f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + (y-x)\varepsilon_1(y) \text{ et } g(y) = g(x) + (y-x)g'(x) + (y-x)\varepsilon_2(y) \ .$$

On obtient donc pour tout $y \in Y$

$$f(y)g(y) = f(x)g(x) + (y-x)(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) + (y-x)\varepsilon(y) \ .$$

Ci-dessus, on a posé

$$\varepsilon(y) = f(x)\varepsilon_2(y) + (y-x)f'(x)g'(x) + (y-x)f'(x)\varepsilon_2(y) + \varepsilon_1(y)g(x) + (y-x)\varepsilon_1(y)g'(x) + (y-x)\varepsilon_1(y)\varepsilon_2(y) \ .$$

Cette fonction tend vers 0 quand y tend vers x et on a obtenu

$$f(y)g(y) = f(x)g(x) + (y-x)(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) + (y-x)\varepsilon(y) \ .$$

Ceci montre à la fois que fg est dérivable en x et que sa dérivée y est égale à $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. □

Proposition 6.17. *Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \colon I \to \mathbb{R}$ et $g \colon J \to \mathbb{R}$ telle que $g(J) \subseteq J$. Si $x \in J$ est tel que g est dérivable en x et f est dérivable en $g(x)$, alors $f \circ g$ est dérivable en x et on a*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \ .$$

Démonstration. Comme ci-dessus, Il existe des fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \colon I \to \mathbb{R}$ telle que ε_1 tend vers 0 en $g(x)$, ε_2 tend vers 0 en x et telles que l'on ait

$\forall y \in I\ f(y) = f(g(x)) + (y - g(x))f'(g(x)) + (y - g(x))\varepsilon_1(y)$ et $\forall z \in J\ g(z) = g(x) + (z - x)g'(x) + (z - x)\varepsilon_2(z)$.

En particulier, on obtient que pour tout $z \in J$ on a

$$\begin{aligned} f(g(z)) &= f\left(g(x) + (z - x)g'(x) + (z - x)\varepsilon_2(z)\right) \\ &= f(g(x)) + (z - x)g'(x)f'(g(x)) + +(z - x)\varepsilon_2(z)g'(x) + (z - x)\varepsilon_1(g(z)) \\ &= f(g(x)) + (z - x)g'(x)f'(g(x)) + (z - x)\varepsilon(z) \end{aligned}$$

où ε tend vers 0 quand z tend vers x. □

Cette formule permet de retrouver les dérivées des fonctions composées f^n, $\cos(f)$, $\sin(f)$, $\ln(f)$, etc. que vous connaissez déjà.

Corollaire 6.18. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un certain $x \in I$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, f^n est dérivable en et on a $(f^n)'(x) = nf'(x)(f(x))^{n-1}$.
2. $\cos(f)$, $\sin(f)$ sont dérivables en x et $(\cos(f))' = -f' \sin(f)$, $(\sin(f))' = f' \cos(f)$.
3. Si $f(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}$.
4. Si $f(x) > 0$, $\ln(f)$ est dérivable en x et $(\ln(f))'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Démonstration. Montrons par exemple le troisième point ci-dessus. On sait que $g \colon y \mapsto \dfrac{1}{y}$ est dérivable en $f(x)$ puisque $f(x) \neq 0$, et on peut alors appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées pour conclure que $\dfrac{1}{f} = g \circ f$ est dérivable en x, de dérivée égale à

$$g'(f(x))f'(x) = -\frac{1}{(f(x))^2} f(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} \ .$$

□

Corollaire 6.19. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x \in I$. Si $x \in I$ est tel que $g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et on a $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Démonstration. Le quotient $\dfrac{f}{g}$ n'est rien d'autre que le produit de f et de $\dfrac{1}{g}$, qui sont toutes deux dérivables en x. Par conséquent, le théorème de dérivabilité des produits nous donne que $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x, de dérivée

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= f'(x)\left(\frac{1}{g}\right)(x) + \left(\frac{1}{g}\right)'(x)f(x) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

□

Parfois, pour décider si une fonction est dérivable en un point, on est obligé de revenir à la définition : considérons par exemple le cas de la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Notons que cette fonction est continue en 0 : comme $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ pour tout $x > 0$, on a bien

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0) \ .$$

Manifestement, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ et sa dérivée en un point $x \neq 0$ est égale à $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Notons que $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0^+ (pourquoi ?). Cela ne signifie pas, a priori, que f n'est pas dérivable en 0 ! Pour décider si elle est dérivable, on forme le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ .$$

On conclut que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 : f est bien dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. Mais f' n'est pas continue en 0.

6.3 Théorème de Rolle et des accroissements finis.

Définition 6.20. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $a \in I$ est un :

- *maximum* de f sur I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq f(a)$;
- *minimum* de f sur I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f(a)$;
- *extremum* de f sur I si a est un minimum ou un maximum de f sur I.

Définition 6.21. Soit I un intervalle *ouvert* de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que a est un :

- *maximum local* de f sur I s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ on ait
$$|x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a) \ .$$
- *minimum local* de f sur I s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ on ait
$$|x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a) \ .$$
- *extremum local* de f sur I si a est un minimum local ou un maximum local de f sur I.

Proposition 6.22. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction et x un extremum local de f. Si f est dérivable en x alors on doit avoir $f'(x) = 0$.*

Démonstration. Supposons que $x \in I$ est tel que $f'(x) \neq 0$, et montrons que x ne peut être un extremum local pour f. Supposons par exemple $f'(x) > 0$. Comme $f'(x)$ est la limite du taux d'accroissement $f(y) - f(x)y - x$ quand y tend vers x, celui-ci doit être > 0 pour y suffisamment proche de x, autrement dit :

$$\exists \delta > 0 \ \forall y \in I \ 0 < |y-x| \leq \delta \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0 \ .$$

Par conséquent, pour tout $y \in I$ tel que $0 < y - x \leq \delta$, on a $f(y) > f(x)$, ce qui montre que x n'est pas un maximum local de f ; et pour tout $y \in I$ tel que $-\delta \leq y - x < 0$, on a $f(y) < f(x)$ donc x n'est pas non plus un minimum local.

Le cas $f'(x) < 0$ se traite de la même façon, ou se déduit en appliquant ce qu'on vient de démontrer à $-f$. □

Notons par contre que la condition $f'(x) = 0$ n'est pas suffisante pour conclure que x est un extremum local de f ! Par exemple, si on considère la fonction $f\colon x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local de f. Les développements limités nous permettront bientôt de mieux étudier le comportement local d'une fonction en un point où $f'(x) = 0$.

Théorème 6.23 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*