Chapitre 9

Développements limités et applications

Les développements limités sont particulièrement utiles pour calculer des limites, ou déterminer des équivalents. Leur avantage par rapport aux équivalents est qu'on peut ajouter et composer des développements limités (ce qui nécessite toutefois un peu d'attention...)

9.1 Développements limités

Définition 9.1. Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f \colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un *développement limité* à l'ordre n en x_0 s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) = P(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n) \ .$$

On dit alors que P est la *partie régulière* du développement limité, tandis que $f - P$ est appelé le *reste*.

La formule de Taylor-Young nous permet d'assurer que, si f est n fois dérivable en x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, et que la partie régulière de ce développement limité est

$$f(x_0) + f'(x_0)X + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2}X^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}X^n \ .$$

En particulier, quand f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'on sait calculer la suite des dérivées successives $f^{(n)}(0)$, alors on peut donner les développements limités de f à tout ordre en 0. On reviendra plus tard sur les calculs pratiques de développements limités et leurs applications, pour l'instant on va développer un peu leurs propriétés théoriques (qui nous permettront de simplifier certains calculs).

Proposition 9.2. *La partie régulière d'un développement limité est unique. Plus précisément, si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ sont tels que $P(x - x_0) - Q(x - x_0) = o_{x_0}((x - x_0)^n)$ pour un certain x_0 de $\mathbb{R}$, alors $P = Q$.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $x_0 = 0$. Ecrivons $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, et $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$. Alors on a bien sûr

$$P(X) - Q(X) = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k)X^k \ .$$

Si un des termes $c_k = a_k - b_k$ est différent de 0, alors on prend le plus petit k tel que cela arrive (appelons-le k_0) et on a

$$P(X) - Q(X) = c_{k_0} x^{k_0} \left(1 + \sum_{k=k_0+1}^n \frac{c_k}{c_{k_0}} X^{k-k_0} \right) \ .$$

En particulier, on voit que dans ce cas on a $P(x) - Q(x) \sim_0 c_{k_0} x^{k_0}$, et donc $P(x) - Q(x)$ n'est pas négligeable devant x^n. Par conséquent, si jamais $P(x) - Q(x) = o_0(x^n)$ alors on doit avoir $P = Q$. $\square$

En particulier, on voit que si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, de partie régulière P, alors pour tout $k \leq n$ la partie régulière du développement limité de f en x_0 à l'ordre k est obtenue en enlevant de P ses termes de degré $\geq k + 1$.

Proposition 9.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, n un entier, $x_0 \in I$ et $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ des fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en x_0 de parties régulières P, Q respectivement. Alors :*

1. *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0, de partie régulière $\lambda P + \mu Q$.*
2. *fg admet un développement limité à l'ordre n en x_0, de partie régulière obtenue en ne retenant que les termes de degré $\leq n$ du polynôme $P.Q$.*

Il est très important que, dans l'énoncé ci-dessus, les développements limités de f et de g sont calculés **au même ordre**!

Démonstration. Pour alléger la notation, on ne va traiter que le cas $x_0 = 0$, qui est le cas le plus important en pratique et auquel on se ramène par une simple translation. Pour montrer la première propriété, on écrit simplement

$$\begin{aligned}\lambda f(x) + \mu g(x) &= \lambda(P(x) + o(x^n) + \mu(Q(x) + o(x^n)\\ &= (\lambda P(x) + \mu Q(x)) + (\lambda o(x^n) + \mu o(x^n))\\ &= (\lambda P(x) + \mu Q(x)) + o(x^n)\ .\end{aligned}$$

La deuxième propriété se montre de façon similaire, mais il faut bien comprendre que, pour tout $m > n$, on a $x^m = o(x^n)$ (en 0) ; en particulier, si on note R le polynôme obtenu en ne conservant que les termes de degré $\leq n$ de PQ, alors on a $R(x) = P(x)Q(x) + o(x^n)$. On a aussi $o(x^n).o(x^n) = o(x^{2n}) = o(x^n)$ (ici, il faut bien faire attention : on n'a pas écrit que les fonctions négligeables devant x^n et x^{2n} étaient les mêmes ; on a écrit que toute fonction négligeable en 0 devant x^{2n} était en particulier négligeable en 0 devant x^n...). Une fois qu'on a compris tout cela, on peut écrire

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= (P(x) + o(x^n))(Q(x) + o(x^n))\\ &= P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n)\\ &= (R(x) + o(x^n)) + o(x^n) + o(x^n) + o(x^n)\\ &= R(x) + o(x^n)\ .\end{aligned}$$

□

Notons que, dans les preuves ci-dessus, on a été très lourd dans la rédaction et la manipulation des $o(x^n)$; une fois qu'on y sera un peu mieux habitué, on n'écrira plus $o(x^n)$ qu'une fois par ligne de calcul...

On peut aussi composer des développements limités, mais bien sûr il faut faire attention aux points où on compose !

Proposition 9.4. *Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$, $g \colon I \to J$ et $f \colon J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que g ait un développement limité à l'ordre n en x_0 (de partie régulière Q) et f ait un développement limité à l'ordre n en $g(x_0)$ (de partie régulière P). Alors $f \circ g$ a un développement limité à l'ordre n en x_0, dont la partie régulière est le polynôme obtenu en enlevant à $P \circ (Q - Q(0))$ tous ses termes de degré $> n$.*

Encore une fois, on ne compose les développements limités que s'ils ont été calculés au même ordre pour f et pour g.

Démonstration. Si $n = 0$ il s'agit de montrer que $f \circ g$ est continue en x_0, ce qu'on sait déjà. Sinon, puisque g admet un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en x_0 on a en particulier $g(x) - g(x_0) = a(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$, ce dont on tire que $o_{x_0}((g(x) - g(x_0))^n) = o_{x_0}((x - x_0)^n)$. De plus, on voit en développant que

$$P(Q(x - x_0) - Q(0) + o((x - x_0)^n)) = P(Q(x - x_0) - Q(0)) + o_{x_0}((x - x_0)^n)\ .$$

Enfin, on a par définition d'un développement limité que $Q(0) = g(x_0)$. Une fois ces informations rassemblées, il nous suffit d'écrire

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= P(g(x) - g(x_0)) + o_{x_0}((g(x) - g(x_0))^n)\\ &= P\left(Q(x - x_0) - Q(0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)\right) + o((x - x_0)^n)\\ &= P(Q(x - x_0) - Q(0)) + o_{x_0}((x - x_0)^n)\end{aligned}$$

En notant R le polynôme obtenu en ne retenant que les termes de degré $\leq n$ de $P \circ (Q - Q(0)$, on vient d'arriver à

$$f(g(x)) = R(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

□

En pratique, on ne composera que des développements limités avec $Q(0) = 0$ et il s'agira simplement de calculer une composée.

Les deux résultats précédents nous disent que les développements limités sont plus faciles à manipuler que les équivalents : comme les équivalents, on peut les multiplier, mais contrairement aux équivalents on peut aussi les ajouter et les composer. La proposition suivante nous dit qu'on peut aussi les intégrer !

Proposition 9.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$ et f une fonction dérivable sur I telle que f' soit continue et ait un développement limité à l'ordre n en x_0, de partie régulière P. Alors f a un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0, dont la partie régulière est la primitive Q de P telle que $Q(0) = f(x_0)$.*

Démonstration. Par hypothèse, on peut écrire

$$f'(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \ .$$

Exactement comme dans la preuve de la formule de Taylor-Young, on utilise le fait que $\displaystyle\int_{x_0}^{x} o((t - x_0)^n)dt = o((x - x_0)^{n+1}$, et on obtient alors en intégrant (et en utilisant le fait que f' est continue pour pouvoir appliquer le théorème fondamental de l'analyse) que

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} P(t - x_0)dt + o((x - x_0)^{n+1} \\ &= Q(x - x_0) - Q(0) + o((x - x_0)^{n+1}) \ . \end{aligned}$$

Puisque $Q(0) = f(x_0)$, on obtient bien comme attendu

$$f(x) = Q(x - x_0) + o((x - x_0)^{n+1} \ .$$

□

Par contre, on ne peut pas en général dériver un développement limité : il peut arriver que f ait un développement limité à l'ordre n en 0, mais que f' n'ait pas de développement limité à l'ordre $n - 1$ en 0...

9.2 Les développements limités classiques

Ci-dessous on ne va écrire que dans développements limités en 0 (et on écrira $o(x^n)$ au lieu de $o_0(x^n)$) ; en général si on calcule un développement limité de f en $x_0 \neq 0$ il est souvent plus pratique de poser $x = x_0 + h$ et de se ramener à un développement limité de $h \mapsto f(x_0 + h)$ en 0.

Puisque on a $\exp'(x) = \exp(x)$, on a immédiatement $\exp^{(n)}(0) = 1$, et la formule de Taylor-Young nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ .$$

Pour les fonctions trigonométriques, c'est à peine plus difficile : on a $\sin'(x) = \cos(x)$, et $\cos'(x) = -\sin(x)$, ce dont on déduit les formules

$$\forall n \in \mathbb{N} \sin^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \ .$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \cos^{(2n)}(0) = (-1)^n \text{ et } \cos^{(2n+1)}(0) = 0 \ .$$

La formule de Taylor-Young nous donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \ ;$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}) \ ;$$

On voit ci-dessus que, dans le développement limité de cos, n'apparaissent que des termes pairs, et dans celui de sin que des termes impairs. La raison en est explicitée dans la proposition suivante.

Proposition 9.6. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0, de partie régulière P. Si f est paire, alors tous les coefficients de degré impair de P sont nuls ; et si f est impaire alors tous les coefficients de degré pair de P sont nuls.*

Démonstration. C'est une conséquence de l'unicité de la partie régulière d'un développement limité. De l'égalité $f(x) = P(x) + o(x^n)$ on déduit que $f(-x) = P(-x) + o((-x)^n) = P(-x) + o(x^n)$. Si $f(x) = f(-x)$, alors $P(X)$ et $P(-X)$ sont donc tous les deux des parties régulières du développement limité de f à l'ordre n en 0, d'où $P(X) = P(-X)$, et P n'a que de coefficients de degré pair. De même si $f(x) = -f(-x)$ on déduit que $P(X) = -P(-X)$ et P n'a que des coefficients d'ordre impair. $\square$

Continuons notre liste de développements limités ; par la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} + o(x^n) \ .$$

Autrement dit, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \ .$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \frac{1}{1 + x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \ .$$

En intégrant, on obtient

$$-\ln(1 - x) = \ln(1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k + 1} + o(x^{n+1}) \ , \text{ et donc}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ln(1 - x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \ .$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$$

Ceci nous permet également de calculer le développement limité en 0 de arctan : à partir de $\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$, on obtient en intégrant que

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k + 1} + o(x^{2n+1}) \ .$$

Voyons une dernière formule à connaître : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on vérifie par récurrence que, pour $n \geq 1$, la dérivée n-ième de $f_\alpha \colon x \mapsto (1 + x)^\alpha$ est égale à $\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n - 1)(1 + x)^{\alpha - n}$. En particulier, pour $n \geq 1$ on a $f_\alpha^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n - 1)$, et la formule de Taylor-Young nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n - 1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ .$$

Récapitulons tous les développements que nous venons d'obtenir :

- $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.
- $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$.

- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$.
- $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha.x + \ldots + \alpha.(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$ (valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$).

Les résultats ci-dessus ont été obtenus à partir de la formule de Taylor-Young ; en général, c'est une mauvaise idée de calculer un développement limité à l'ordre n en calculant n dérivées successives de f, car c'est beaucoup trop lourd en calcul. On préférera si possible déduire les développements limités à partir des développements classiques ci-dessus (à connaître ou à savoir retrouver très vite) et les méthodes de calcul : produit, composition, intégration... Pour les développements limités des quotients, on peut soit raisonner par composition comme on va le voir ci-dessous, soit appliquer la méthode des *divisions par puissances croissantes* qu'on va aussi se contenter d'illustrer sur des exemples.

9.3 Premiers exemples de calculs de développements limités

Un exemple : trois méthodes pour calculer le développement limité de $\tan$ **en** 0 **à l'ordre** 5.

Première méthode : la division selon les puissances croissantes, qui ressemble à une division euclidienne, sauf qu'on fait en sorte d'éliminer successivement les termes de plus bas degré.

On commence par écrire

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} .$$

Puis on utilise la méthode des puissances croissantes :

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x & - & \frac{x^3}{6} & + & \frac{x^5}{120} & + & o(x^5) & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\ \cline{9-9}
- & x & + & \frac{x^3}{2} & - & \frac{x^5}{24} & + & o(x^5) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-8}
 & & & \frac{x^3}{3} & - & \frac{x^5}{30} & + & o(x^5) & \\
 & & - & \frac{x^3}{3} & + & \frac{x^5}{6} & + & o(x^5) & \\ \cline{3-8}
 & & & & & \frac{2}{15}x^5 & + & o(x^5) &
\end{array}$$

On a donc obtenu la relation

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5) + o(x^5) ,$$

qui nous donne finalement $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

Deuxième méthode : par composition, en utilisant le développement limité de $\frac{1}{1-u}$ (ci-dessous, les termes en gris clair sont ceux qu'on aurait pu se passer d'écrire, puisqu'ils font apparaître des termes de degré > 5).

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}{1 - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})} + o(x^5) \\
&= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})(1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^2 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^3 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^4 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^5) + o(x^5) \\
&= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}) + o(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) .
\end{aligned}$$

(Note : dans la dernière ligne, on n'a pas de nouveau pas fait apparaître les termes de degré > 5, puisque ce sont tous des $o(x^5)$)

Troisième méthode : en utilisant une équation différentielle. On a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. En écrivant le développement de $\tan'$ en 0 à l'ordre 4 sous la forme $a + bx^2 + cx^4 + o(x^4)$ (il n'y pas de termes d'ordre impair : tan est impaire, donc $\tan'$ est paire), le fait que $\tan(0) = 0$ et le théorème d'intégration des développements limités nous donne que le développement limité de tan en 0 à l'ordre 5 est égal à $ax + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^5}{5} + o(x^5)$. La formule $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ nous donne alors (par composition) :

$$a + bx^2 + cx^4 + o(x^4) = 1 + (ax + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^5}{5})^2 + o(x^4) \ .$$

Autrement dit, on a

$$a + bx^2 + cx^4 + o(x^4) = 1 + a^2x^2 + \frac{2ab}{3}x^4 + \frac{b^2}{9}x^6 + o(x^4)$$

Le théorème d'unicité des développements limités nous permet d'identifier les deux développements terme à terme : ceci donne $a = 1$, $b = a^2 = 1$, et $c = \frac{2ab}{3} = \frac{2}{3}$. En reportant cela dans la formule donnant le développement de tan à l'ordre 5 en 0 en fonction de a, b, c, on obtient de nouveau $\tan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

Voyons brièvement deux autres exemples. Si l'on veut calculer le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0, on peut utiliser la méthode de composition (en évitant de faire intervenir dans le calcul des termes de trop haut degré, comme on l'a fait pour la tangente) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\sin(x)} &= \frac{1}{1 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + x^2 + x^3 + o(x^3) \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \ .
\end{aligned}$$

A la deuxième ligne ci-dessus, on n'a pas pris la peine d'écrire les « $\frac{x^3}{6}$ »quand on a composé après l'ordre 2 : dans le développement, ils auraient contribué des termes négligeables devant x^3. C'est un bon exercice d'essayer de retrouver ce résultat en utilisant la méthode de division par puissances croissantes...

De même, calculons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{\cos(x)}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos(x)} &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2}) + o(x^2) \\
&= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \ .
\end{aligned}$$

Attention, on ne calcule pas des développements limités seulement en 0 ! Par exemple, essayons de développer $x \mapsto e^x$ à l'ordre 3 en 1. On écrit $x = 1 + h$, et on se ramène à développer $h \mapsto 1 + h$ à l'ordre 3 en 0, ce qui nous amène au calcul suivant :

$$\begin{aligned}
e^{1+h} &= e.e^h \\
&= e(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)) \ .
\end{aligned}$$

En revenant à la relation $h = x - 1$, on a obtenu le développement limité $e^x = e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}) + o((x-1)^3)$.

Exercice 9.7. Donner le développement limité à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$ de $x \mapsto \sin(x)$.