Chapitre 8

Comparaison locale de fonctions et formules de Taylor

8.1 o, O et équivalents

8.1.1 Le cas des fonctions

Définition 8.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à I et $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *négligeable devant g en x_0* si :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|\ .$$

On note alors $f = o_{x_0}(g)$.

Quand x_0 est clairement précisé, on note simplement $f = o(g)$. Remarquons que, si g ne s'annule pas, alors dire que f est négligeable devant g revient à dire que le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. En particulier, la notation $f = o_{x_0}(1)$ signifie simplement que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 !

La notation $f = o(g)$ est délicate à manipuler et il faut faire très attention au début ; par exemple, si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ en x_0 alors on a encore $f_1 + f_2 = o(g)$! En 0, on a par exemple $x^2 = x^3 + o(1)$, mais aussi $x^2 = o(1)$, etc.

Exercice 8.2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en x_0, et $f'(x_0) = l$, si et seulement si on peut écrire $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)l + o_{x_0}(x - x_0)$.

Définition 8.3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à I et $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *dominée par g* en x_0, et on note $f = O_{x_0}(g)$, si

$$\exists M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|\ .$$

Quand g ne s'annule pas sur I, $f = O(g)$ revient à dire que f/g est bornée au voisinage de x_0.

La notion la plus importante en pratique est celle qui est présentée dans la définition suivante.

Définition 8.4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à I et $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *équivalente à g* en x_0, et on note $f \sim_{x_0} g$, s'il existe $\delta > 0$ et une fonction $h\colon I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ telle que $h(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers x_0, et $f(x) = h(x)g(x)$ pour tout $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Quand g ne s'annule pas, dire que $f \sim_{x_0} g$ revient à dire que $\frac{f}{g}(x)$ tend vers 1 quand x tend vers x_0 (et c'est comme ça qu'il faut y penser).

Exercice 8.5. Montrer que $f \sim_{x_0} g$ si et seulement si $g \sim_{x_0} f$. Montrer que $f \sim_{x_0} g$ si et seulement si $g = f + o_{x_0}(f)$.

Les équivalents sont particulièrement utiles pour calculer des limites : si l est un réel **non nul**, alors dire que $f \sim_{x_0} l$ revient à dire que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0. Pourquoi distinguer le cas où l est nul ? Parce que, si $f \sim_g x_0 0$, alors la définition d'un équivalent impose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f = 0$ sur $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, ce qui est bien sur différent de dire que f tend vers 0 !

Ce problème se retrouve lorsqu'on essaye d'appliquer des opérations algébriques aux équivalents : si on peut sans danger mutliplier des équivalents, on ne peut en général pas les ajouter (ni les soustraire). Voyons un exemple : soit $f(x) = x$ et $g(x) = -x+x^2$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. En 0, on a $f(x) \sim x$ et $g(x) \sim -x \sim -f(x)$; mais puisque $f(x) + g(x) = x^2$, on n'a pas $f(x) + g(x) \sim 0$!

De la même façon, on ne peut pas composer des équivalents sans faire un minimum attention. Dans le même esprit que ci-dessus, considérons les fonctions $f, g \colon]0, +\infty[$ to $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$. Alors en 0 on a $f(x) \sim g(x)$; pourtant, $e^{g(x)}$ et $e^{f(x)}$ ne sont pas équivalentes, puisque $e^{g(x)} = e^{1/x}e^{f(x)}$ et $e^{1/x}$ ne tend pas vers 1 quand x tend vers 0^+.

On pourrait énoncer un théorème selon lequel on peut composer des équivalents quand les fonctions équivalentes sont "à gauche" de la composition ; mais ce théorème n'est pas très utile en pratique et on préférera composer des développements limités.

Notons avant de décrire brièvement le cas des suites que toutes ces définitions (o, O, $\sim$) auraient aussi un sens en $\pm\infty$; c'est un bon exercice d'écrire les définitions correspondantes (vous pouvez vous inspirer si nécessaire des définitions données ci-dessous pour les suites).

8.1.2 Le cas des suites

Les définitions se traduisent sans difficultés (donner la définition de o et $\sim$).

Définition 8.6. Soit u, v deux suites de nombres réels.

1. On dit que u est négligeable devant v, et on note $u = o(v)$, si
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N |u(n)| \leq \varepsilon |v(n)|$$
Si v ne s'annule pas, cela revient à dire que $u(n)/v(n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. On dit que u et v sont équivalentes, et on note $u \sim v$, s'il existe une suite w telle que w_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, et N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n = w_n v_n$. Si v ne s'annule pas, cela revient à dire que $u(n)/v(n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Comme pour les fonctions, on peut mutliplier ou diviser des équivalents (en évitant de diviser par 0) mais on ne peut en général pas les ajouter ou les soustraire.

Exemple. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $k \geq 0$, et a_k son coefficient dominant. Alors on a $P(n) \sim a_k n^k$.
En effet, on peut écrire
$$P(n) = a_k n^k \left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_j}{a_k} n^{j-k} \right) .$$
Puisque $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_j}{a_k} n^{j-k}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on vient de montrer que $P(n) \sim a_k n^k$.

Exercice 8.7. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle. Si on suppose que P est de degré k et de coefficient dominant a, et Q est de degré l et de coefficient dominant b, montrer que $P(n)/Q(n) \sim \frac{a}{b} n^{k-l}$.

8.2 Les formules de Taylor

On a vu que, si f est dérivable en x_0, alors on peut écrire $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x) + o(x - x_0)$. Autrement dit, la fonction affine $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est une approximation de f en x_0 avec une erreur au plus de l'ordre de $x - x_0$. Il est très utile de pouvoir approcher f en x_0 avec une meilleure précision par des fonctions polynomiales, et c'est ce que permettent les formules de Taylor.

La première formule de Taylor est celle qui a les hypothèses les plus faibles (et la conclusion aussi la plus faible).

Théorème 8.8 (Formule de Taylor–Young). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et f une fonction $n-1$ fois dérivable sur I et telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Alors on a*
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) .$$

En notation plus condensée :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\ .$$

En s'avançant un peu, on dira plus tard que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$ est le *développement limité* de f en x_0 à l'ordre n (dans ce cas particulier, le développement limité est obtenu en calculant le *polynôme de Taylor* de f à l'ordre n), et $\displaystyle f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ est le reste du développement limité ; la formule de Taylor-Young nous permet simplement de dire que le reste du développement limité à l'ordre n est un $o((x-x_0)^n)$.

Démonstration. Pour $n=1$ la formule de Taylor–Young est une simple reformulation de la dérivabilité de f en x_0, comme on a déjà eu plusieurs fois l'occasion de le remarquer.

Supposons donc le théorème de Taylor-Young démontré pour tout $p\in\{1,\dots,n\}$, et f une fonction n fois dérivable sur I telle que $f^{(n+1)}(x_0)$ existe ; on va faire l'hypothèse supplémentaire que f' est continue pour simplifier l'argument (cela change la démonstration seulement pour le cas $n=2$).

Par l'hypothèse de récurrence appliquée à f', on sait qu'on peut trouver une fonction ε qui tend vers 0 en x_0 et telle que

$$\forall x\in I\ f'(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+(x-x_0)^n\varepsilon(x)\ ,$$

Autrement dit, pour tout $x\in I$ on a

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

Notons que $R(x)=(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ est une fonction continue puisque c'est la différence de f' et d'une fonction polynôme ; de plus, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que $|R(x)|\le\varepsilon|(x-x_0)^n|$. Donc on a aussi

$$\forall x\in I\ |x-x_0|\le\delta\Rightarrow|\int_x^{x_0}R(x)dx|\le\left|\int_x^{x_0}\varepsilon|(x-x_0)^n|dx\right|=\varepsilon\frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1}\ .$$

Puisque

$$f'(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=R(x)\ ,$$

on obtient en intégrant entre x_0 et x que

$$f(x)-f(x_0)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\int_{x_0}^{x}R(t)dt$$

En particulier, on voit que pour tout x dans I tel que $|x-x_0|\le\delta$ on a

$$\left|f(x)-\left(f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)\right|\le\frac{\varepsilon}{n+1}|x-x_0|^{n+1}$$

On vient donc de montrer que

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^{n+1})\ .$$

Ceci montre que la formule de Taylor-Young est vraie à l'ordre $n+1$, ce qui nous permet de conclure par récurrence. □

Avec des hypothèses plus fortes sur f, on peut avoir une estimation plus précise du reste.

Théorème 8.9 (Formule de Taylor–Lagrange). *Soit $a < b$ deux réels, $n \geq 0$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et telle que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a,b[$. Alors pour tout $x, x_0 \in [a,b]$ il existe $c \in]x_0, x[$ tel que l'on ait*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \ .$$

Démonstration. Notons que pour $n = 0$ on obtient exactement l'égalité des accroissements finis, et on sait donc déjà que la formule de Taylor-Lagrange est vraie à l'ordre 0. Pour montrer qu'elle est vraie à un ordre $n > 0$, on va utiliser le théorème de Rolle ; soit donc f, $n > 0$, x_0 et x comme dans l'énoncé et considérons la fonction auxiliaire φ définie sur le segment $[x_0, x]$ par

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \lambda \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \ ,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est choisi de telle façon que $\varphi(x_0) = 0$. On a aussi $\varphi(x) = 0$ par définition de φ, de plus les hypothèses sur f assurent que φ est dérivable sur $]x_0, x[$ et continue sur $[x_0, x]$. On peut donc lui appliquer le théorème de Rolle pour conclure qu'il existe $c \in]x_0, x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Cette égalité est équivalente à

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(x-c)^{k-1} + \lambda \frac{(x-c)^n}{n!} = 0 \ .$$

En décalant les indices dans la deuxième somme, ceci est équivalent à

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + \lambda \frac{(x-c)^n}{n!} = 0 \ .$$

Après simplification, on est donc arrivé à $\dfrac{f^{(n+1)(c)}}{n!}(x-c)^n = \lambda \dfrac{(x-c)^n}{n!}$, autrement dit $\lambda = f^{(n-1)}(c)$ (notons qu'ici on utilise le fait que $c \neq x$!). En revenant à la définition de λ et au fait que $\varphi(x_0) = 0$ on a obtenu

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - f^{(n-1)}(c) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \ ,$$

et on a donc bien démontré la formule de Taylor-Lagrange. □

Et si on renforce encore les hypothèses sur f, on obtient même une formule explicite pour le reste.

Théorème 8.10 (Formule de Taylor avec reste intégrale). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors pour tout $x, x_0 \in I$ on a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \ .$$

Démonstration. On va raisonner par récurrence. Pour $n = 0$, on doit démontrer l'égalité

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

qui est vraie, d'après le théorème fondamental de l'analyse, dès que f' est continue. Supposons maintenant le résultat démontré jusqu'au rang n, et supposons f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. On peut en particulier lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral au rang n pour écrire que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \ .$$

En appliquant la formule d'intégration par parties (ce qui est possible puisque $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto (x-t)^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$), on a

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt &= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= f^{(n+1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

En injectant cette égalité dans la formule pour $f(x)$ obtenue ci-dessus, on obtient exactement la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n+1$.

□

Exercice 8.11. Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, donner une démonstration de la formule de Taylor-Lagrange à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral et de la première formule de la moyenne.