Chapitre 1

Calcul matriciel

Dans tout ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

1.1 Systèmes et point de vue matriciel

Rappelons qu'un système d'équations linéaires (disons, à n équations et m inconnues $x_1, \ldots, x_m$ dans $\mathbb{K}$) se présente sous la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,m}x_m & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,m}x_m & = b_2 \\ \qquad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,m}x_m & = b_n \end{cases}$$

Trouver les solutions d'un tel système (s'il y en a !) revient à trouver l'image inverse de $\{b_1, \ldots, b_n\}$ par une certaine fonction associée au système : la fonction $\varphi\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ définie par

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_m, \ldots, a_{n,1}x_1 + \ldots a_{n,m}x_m) \ .$$

En effet, dire que $(x_1, \ldots, x_m)$ est solution du système revient à dire que $f(x_1, \ldots, x_m) = (b_1, \ldots, b_n)$, ou encore que $(x_1, \ldots, x_m) \in f^{-1}(\{b_1, \ldots, b_n\})$.

Toute l'information sur la fonction φ est contenue dans les valeurs de $a_{1,1}, \ldots, a_{1,m}, \ldots, a_{n,1}, \ldots, a_{n,m}$; on regroupe ces nombres dans une *matrice*.

Définition 1.1. Une *matrice* à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Quand $n = 1$ on dit que A est une *matrice ligne* ; quand $m = 1$ on dit que A est une *matrice colonne*. Enfin, quand $n = m$ on dit que la matrice est une *matrice carrée*.

On note $M_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes est simplement noté $M_n(\mathbb{K})$.

Ces objets sont très utiles pour mener à bien des calculs pratiques ; souvent, on est en fait intéressé par un système ou une fonction associée à la matrice comme ci-dessus.

1.2 Opérations sur les matrices

Les opérations sur les fonctions se traduisent en opérations sur les matrices ; notons que si f, g sont deux fonctions de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$ alors on peut considérer leur somme $f + g\colon x \in \mathbb{K}^m \mapsto f(x) + g(x)$.

Définition 1.2. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, leur somme $A + B$ est la matrice dont le coefficient sur la i-ième ligne et la j-ième colone est égal à $a_{i,j} + b_{i,j}$; et leur différence $A - B$ est la matrice de coefficients $a_{i,j} - b_{i,j}$.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. La somme de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix}$ n'est pas définie.

Il est également facile de multiplier une matrice par un *scalaire*, c'est à dire un élément de $\mathbb{K}$.

Définition 1.3. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors λA est la matrice de coefficients $\lambda a_{i,j}$.

Notons que l'addition des matrices est commutative : pour tout $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ on a $A + B = B + A$. Elle est également associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$, et en général on l'écrit simplement $A + B + C$. Enfin, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Le produit de matrices est une opération plus intéressante ; il correspond à la *composition* des fonctions associées aux matrices. On peut composer deux fonctions $\varphi \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ et $g \colon K^{m'} \to \mathbb{K}^{n'}$ et considérer la fonction $f \circ g$ exactement quand l'espace d'arrivée de g est égal à l'espace de définition de φ, autrement dit quand $n' = m$. En termes de matrices, le produit de deux matrices AB sera donc défini exactement quand B a autant de *lignes* que A a de *colonnes*.

Définition 1.4. Soit $n, m, n', m' \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n',m'}(\mathbb{K})$. Alors le produit AB est défini si, et seulement si, $m = n'$, et dans ce cas c'est la matrice à n lignes et m' colonnes dont le coefficient sur la ligne i et la colonne j est égal à

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} \ .$$

Pourquoi cette formule ? Pensons que A est la matrice associée à une application $\varphi \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, et B est la matrice associée à une application $g \colon \mathbb{K}^{m'} \to \mathbb{K}^m$. Alors AB doit être la matrice associée à l'application $f \circ g \colon \mathbb{K}^{m'} \to \mathbb{K}^n$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_{m'})$, calculons :

$$\begin{aligned} f \circ g(x_1, \ldots, x_{m'}) &= f(g(x_1, \ldots, x_{m'})) \\ &= f\left(\sum_{j=1}^{m'} b_{1,j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m'} b_{m,j} x_j \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{1,k} (\sum_{j=1}^{m'} b_{k,j} x_j), \ldots, \sum_{k=1}^{m} a_{n,k} (\sum_{j=1}^{m'} b_{k,j} x_j) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m'} (\sum_{k=1}^{m} a_{1,k} b_{k,j}) x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m'} (\sum_{k=1}^{m} a_{n,k} b_{k,j}) x_j \right) \end{aligned}$$

L'application $f \circ g$ a donc pour matrice la matrice à n lignes et m' colonnes dont le coefficient sur la ligne i et la colonne j est égal à $\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$, ce qui correspond bien à notre définition du produit de matrices.

Avec ces conventions, si x est l'élément de $\mathbb{K}^m$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_m$, et $\varphi \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ a pour matrice A, et qu'on considère le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, la matrice colonne $AX = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1,k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} a_{n,k} x_k \end{pmatrix}$ peut être vue comme écrivant *en colonne* l'image $f(x)$. Toujours en écrivant les vecteurs en colonnes, on voit donc que résoudre un système revient à résoudre une équation de la forme $AX = B$, d'inconnue X, où B et X sont deux vecteurs colonnes (X a le même nombre de lignes que d'inconnues du systèmes, tandis que le nombre de lignes de B est le nombre d'équations du système).

Par exemple, calculons le produit

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} ;$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

alors que

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -17 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le dernier exemple ci-dessus nous montre deux phénomènes inhabituels : on peut avoir $AB = 0$ (la matrice nulle) alors que $A \neq 0$ et $B \neq 0$; et on peut avoir $AB \neq BA$. On a tout de même l'associativité du produit de matrices.

Exercice 1.5. Montrer que si A, B, C sont trois matrices telles que AB et BC sont définis, alors $A(BC)$ et $(AB)C$ sont bien définis et $A(BC) = (AB)C$. Autrement dit, le produit matriciel est associatif.

On retrouve la règle habituelle de distributivité : pour toutes matrices $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B, C \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ on a $A(B + C) = AB + AC$.

Définition 1.6. Soit n, m deux entiers. La *matrice nulle* $0_{n,m} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0. Quand il n'y a pas de risque de confusion, on la note simplement 0.

Notons que pour tout $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ on a $0 + A = A + 0 = A$; et si $B \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ alors $0_{n,m}B$ est bien défini et $0_{n,m}B = 0$.

Définition 1.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice identité I_n est l'élément de $M_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient sur la i-ième ligne et la j-ième colonne vaut 0 si $i \neq j$, et 1 si $i = j$. En notant $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 si $i \neq j$, le coefficient (i, j) de I_n est donc $\delta_{i,j}$.

Proposition 1.8. *Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ on a $I_nA = AI_n = A$.*

Démonstration. Par définition, AI_n est l'élément de $M_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient sur la ligne i et la colonne j vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,j} = a_{i,j}\delta_{j,j} = a_{i,j} .$$

Donc on a comme attendu $AI_n = A$. De même I_nA a pour coefficient (i, j)

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}a_{k,j} = \delta_{i,i}a_{i,j} = a_{i,j} .$$

□

En général, on ne peut pas multiplier une matrice A par elle-même : le seul cas où c'est possible est celui où A a autant de lignes que de colonnes, c'est-à-dire le cas où A est une matrice carrée.

Définition 1.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les *puissances* de A sont les matrices $A^i \in M_n(\mathbb{K})$ définies par récurrence par

$$A^0 = I_n \quad ; \quad \forall i \in \mathbb{N}\ A^{i+1} = A \cdot A^i .$$

On vérifie facilement (par exemple, par récurrence sur j) que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ on a $A^{i+j} = A^iA^j$.

Définition 1.10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. On dit alors que B est l'*inverse* de A et on note $B = A^{-1}$.

Seule une matrice carrée peut être inversible ; notons que l'inverse, s'il existe, est unique : si $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$ alors on a d'une part $C(AB) = CI_n = C$ et $C(AB) = (CA)B = I_nB = B$, d'où $B = C$.

On verra un peu plus bas que, quand $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, avoir $AB = I_n$ entraîne nécessairement que $BA = I_n$; mais pour l'instant on n'a pas les moyens de prouver cela.

Proposition 1.11. *1. Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.*

2. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. *Si A est inversible alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ A^m est inversible et $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$; on note simplement cette matrice A^{-m}.*

Démonstration. Le premier point est immédiat : on a $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$, ce qui montre à la fois que A^{-1} est inversible et que son inverse est A.

Le deuxième point découle de l'associativité du produit de matrices :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n \ ; \ (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n \ .$$

Le troisième point est aussi une conséquence de l'associativité et se montre par exemple par récurrence : le résultat est clair pour $m = 0, 1$. S'il est vrai au rang m alors on a

$$A^{m+1}(A^{-1})^{m+1} = A(A^m(A^{-1})^m)A^{-1} = AA^{-1} = I_n \ .$$

□

1.3 Matrices élémentaires et opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Une méthode pour résoudre les systèmes est de faire des opérations sur les lignes pour se ramener à un système plus simple. Ces opérations sont de la forme : multiplier une ligne L_i par λL_i, où λ est un scalaire non nul ; remplacer la ligne L_i par la ligne $L_i + \lambda L_j$, où $j \neq i$ et λ est un scalaire ; et permuter les lignes L_i et L_j. Ces trois opérations sont appelées *opérations élémentaires sur les lignes* et peuvent être interprétées en terme de produit matriciel.

Définition 1.12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, la matrice $E_i(\lambda)$ est obtenue en multipliant par λ la i-ième ligne de I_n (et en ne touchant pas aux autres lignes). Par exemple (pour $n = 5$)

$$E_3(12) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la matrice $E_{i,j}$ est obtenue en échangeant la i-ème et la j-ième ligne de I_n. Par exemple (toujours pour $n = 5$) :

$$E_{2,4} = E_{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Enfin, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $E_{i,j}(\lambda)$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ième ligne de I_n à sa i-ième ligne. Par exemple (sempiternellement pour $n = 5$) :

$$E_{2,1}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les matrices élémentaires sont celles qu'on obtient en appliquant à I_n une opération élémentaire sur les lignes ; on pourrait aussi définir les opérations élémentaires sur les colonnes, et on vérifie facilement que les matrices élémentaires sont également celles qui sont obtenues en appliquant à I_n une opération élémentaire sur les colonnes.

Le lien entre matrices élémentaires et opérations élémentaires est le suivant : multiplier A *à gauche* par une matrice élémentaire revient à appliquer à A la même opération élémentaire qui a servi à définir la matrice élémentaire en question. Plus précisément :

Proposition 1.13. *Soit n, m deux entiers, et $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors :*

1. *Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, la matrice $E_i(\lambda)A$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $L_i \to \lambda L_i$.*
2. *Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, la matrice $E_{i,j}A$ est la matrice obtenue en permutant la i-ième ligne et la j-ième ligne de A.*
3. *Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $E_{i,j}(\lambda)A$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $L_i \to L_i + \lambda L_j$.*

Cette propriété se vérifie facilement et on laisse la preuve en exercice. Notons aussi que multiplier A *à droite* par une matrice élémentaire revient à appliquer une opération élémentaire *sur les colonnes* de A.

Proposition 1.14. *les matrices élémentaires sont inversibles ; et on a les formules :*

$$(E_i(\lambda))^{-1} = E_i(\frac{1}{\lambda}) \ ; \quad (E_{i,j})^{-1} = E_{i,j}; \quad (E_{i,j}(\lambda))^{-1} = E_{i,j}(-\lambda) \ .$$

Notons que, si jamais une matrice A est inversible et qu'on connaît son inverse A^{-1}, il est très facile de résoudre le système $AX = B$: en multipliant par A^{-1} des deux côtés, on a $X = A^{-1}B$.

1.4 La méthode de Gauss : forme échelonnée réduite d'une matrice.

La méthode du pivot de Gauss, appliquée à un système, revient à appliquer des opérations élémentaires sur les équations afin de se ramener à un système plus simple, sous forme *échelonnée*. Sur les matrices, on peut appliquer des opérations sur les lignes ou sur les colonnes ; ci-dessous on va définir ce qu'est une matrice échelonnée en lignes, mais on pourrait aussi définir les matrices échelonnées en colonnes (en échangeant le rôle des lignes et des colonnes dans les définitions). Il faudra savoir échelonner une matrice en ligne et en colonnes : on verra plus tard qu'échelonner en lignes préserve le *noyau* de la matrice (ou plutôt, de l'application linéaire associée ; on verra ces notions plus loin dans le cours) tandis qu'échelonner en colonnes préserve l'*image*.

Définition 1.15. Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. On dit que A est *échelonnée*(en lignes) si elle possède les propriétés suivantes :

- Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ si $L_i = 0$ alors $L_j = 0$ pour tout $j > i$;
- Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $L_i \neq 0$, on appelle *pivot* son premier coefficient non nul ; pour tout $j > i$, ou bien L_j est nulle ou bien le pivot de L_j est situé strictement à droite du pivot de L_i.

Si de plus chaque pivot est égal à 1, et les autres coefficients dans la colonne d'un pivot sont nuls, alors on dit que la matrice est *échelonnée réduite*.

Définition 1.16. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont *équivalentes en lignes* si l'on peut passer de A à B en appliquant un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes.

En termes de produits de matrices, deux matrices A, B sont équivalentes en lignes s'il existe des matrices élémentaires $M_1, \ldots, M_k$ telles que $B = M_1 \ldots M_k A$.

La méthode du pivot de Gauss consiste à appliquer des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice pour se ramener à une matrice échelonnée réduite. Le théorème suivant assure que c'est bien possible.

Théorème 1.17. *Toute matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée réduite.*

Preuve. On va raisonner par récurrence sur le nombre m de colonnes de la matrice. Si $m = 1$, alors soit la matrice est nulle (donc échelonnée), soit elle a un coefficient non nul. Quitte à permuter deux coefficients (opération élémentaire) on peut assurer que ce coefficient soit sur la première ligne. Quitte à multiplier le premier coefficient par une constante non nulle (encore une opération élémentaire) on peut faire en sorte qu'il vaille 1. Et en remplaçant L_j par $L_j - \alpha_k L_1$ (toujours une opération élémentaire) pour un α_j bien choisi pour tout $j \geq 2$, on peut faire en sorte que tous les coefficients à partir de la deuxième ligne soient nuls.

On a donc montré le résultat désiré pour $m = 1$; supposons qu'il soit vrai jusqu'au rang m, et considérons une matrice A avec n lignes et $m + 1$ colonnes. Si la première colonne de A est nulle, on peut regarder la matrice obtenue en oubliant cette colonne et lui appliquer l'hypothèse de récurrence pour la mettre sous forme échelonnée réduite, et donc mettre A sous forme échelonnée réduite.

Sinon, un coefficient sur la première colonne est non nul ; en appliquant les mêmes opérations élémentaires que dans le cas $m = 1$, on peut faire en sorte que ce coefficient vaille 1 et que le premier coefficient de chaque ligne à partir de la deuxième soit nul. Regardons la sous-matrice de A obtenue en oubliant la première ligne et la première colonne de A : par hypothèse de récurrence on peut la mettre sous forme échelonnée en appliquant des opérations élémentaires sur les lignes. Ceci signifie que, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on peut faire en sorte que : la première colonne de A soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, et la sous-matrice obtenue B en oubliant la première ligne et la première colonne est échelonnée réduite. Cette matrice est échelonnée mais pas encore échelonnée réduite : dans la colonne d'un pivot de B, le terme situé sur la première ligne de A pourrait être non nul. Si cela se produit, disons que le pivot est sur la j-ième ligne de A, l'opération $L_1 \to L_1 - \alpha_j L_j$, où α_j est le coefficient au-dessus du pivot sur la première ligne de A, appliquée autant de fois qu'il y a de pivots dans B, résoud le problème. On s'est bien ramené à une matrice échelonnée réduite. □

Notons qu'en fait une matrice est équivalente en ligne à *exactement* une matrice échelonnée réduite (en lignes), fait qu'on va admettre dans ce cours (en pratique on n'aura pas besoin de cette unicité de la forme échelonnée réduite). Pour cette raison on parlera de *la* forme échelonnée réduite (en lignes) d'une matrice.

Par exemple, appliquons la méthode de Gauss à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pour la mettre sous forme échelonnée en lignes ; on cherche la première colonne avec des coefficients non nuls (ici, la deuxième) et (si nécessaire) on permute deux lignes pour que ce coefficient non nul soit sur la première ligne. Ici, par exemple, on échange L_1 et L_2 pour arriver à

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ensuite on utilise le pivot pour faire en sorte que les coefficients sur les lignes en-dessous soient nulles ; ici on remplace L_3 par $L_3 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, $L_3 \to L_3 - L_2$ nous donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est échelonnée, mais pas encore échelonnée réduite ; pour éliminer les coefficients au-dessus de la diagonale on utilise les opérations $L_2 \to 2L_2 + 3L_3$ et $L_1 \to 2L_2 + L_3$ pour aboutir à

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

En multipliant chaque ligne par le bon scalaire, on voit que la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.18. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors sa *transposée* est la matrice $A^t \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ dont le coefficient sur la ligne i et la colonne j est égal à $a_{j,i}$.

Par exemple, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}$.

Proposition 1.19. *Pour toute matrice A on a $(A^t)^t = A$; et si AB sont deux matrices telles que AB est défini alors B^tA^t est bien défini et $B^tA^t = (AB)^t$.*

On vérifie que la transposée d'une matrice élémentaire est encore une matrice élémentaire ; ainsi, en transposant, on échange les opérations élémentaires sur les lignes appliquées à A en opérations élémentaires sur les colonnes appliquées à A^t. Par conséquent, lorsqu'on a montré que toute matrice était équivalente en lignes à une matrice échelonnée réduite en lignes, on a aussi montré que toute matrice est équivalente en colonnes à une matrice échelonnée réduite en colonnes !

1.5 Une méthode de calcul de l'inverse d'une matrice

Théorème 1.20. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est inversible.*
2. *Pour tout vecteur colonne $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = Y$ a une solution unique dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.*
3. *L'équation $AX = 0$ a 0 pour seule solution dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.*
4. *A est équivalente par lignes à I_n.*
5. *A est un produit de matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration. On a déjà vu que si A est inversible alors le système $AX = B$ a pour unique solution $X = A^{-1}B$; il est clair que la deuxième condition est plus forte que la troisième. Pour voir que la troisième condition implique la quatrième, utilisons le fait que A est équivalente par lignes à une matrice échelonnée réduite A'. Alors les systèmes $AX = 0$ et $A'X = 0$ ont les mêmes solutions (une opération élémentaire sur les lignes ne change pas les solutions d'un système) ; donc A' est une matrice carrée échelonnée réduite telle que le système $A'X = 0$ a une unique solution, ce qui impose qu'aucune colonne de A' n'est nulle. Comme A' est une matrice carrée, ceci n'est possible que si $A' = I_n$.

Supposons ensuite que A est équivalente par lignes à I_n ; en utilisant le lien vu plus haut entre opérations élémentaires sur les lignes et multiplication à droite par une matrice élémentaire, ceci revient à dire qu'il existe des matrices élémentaires $M_1, \dots, M_k$ dans $M_n(\mathbb{K})$ telles que $A = M_1 \dots M_k$. Finalement, comme les matrices élémentaires sont inversibles et que tout produit de matrices inversibles est inversible, on déduit de cette propriété que A est inversible. □

Notons une conséquence de ce théorème : disons que A est *inversible à gauche* s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$; alors de $AX = 0$ on déduit $0 = B(AX) = (BA)X = X$, donc le système $AX = 0$ a X pour solution unique. Par conséquent, le théorème précédent nous dit que A est inversible ; et alors de $BA = I_n$ on déduit, en mutlipliant par A^{-1} des deux côtés, que $B = A^{-1}$. Et si jamais A est inversible à droite, disons $AB = I_n$, alors le même raisonnement appliqué à B nous permet d'abord de conclure que B est inversible puis que $A = B^{-1}$, donc A est inversible et $B = A^{-1}$. Résumons ce qu'on vient de montrer.

Proposition 1.21. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$; de même, s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ alors A est inversible et $B = A^{-1}$.*

Le théorème 1.20 a aussi une application pratique : une méthode de calcul de l'inverse d'une matrice (quand il existe !) par des opérations élémentaires sur les lignes. Partant d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, considérons la matrice $B \in M_{n,2n}(\mathbb{K})$ définie par $B = (A|I_n)$; autrement dit, les n premières colonnes de B sont celles de A, les n autres colonnes de B sont celles de I_n. On peut appliquer à A des opérations élémentaires sur les lignes pour se ramener à une matrice échelonnée réduite ; comme on l'a vu plus haut, la seule matrice échelonnée réduite inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ est I_n. Si l'on applique à B les mêmes opérations élémentaires, on obtient une nouvelle matrice $B' = (I_n|A')$. Comme faire des opérations élémentaires sur les lignes revient à multiplier à gauche par des matrices élémentaires, on a donc des matrices élémentaires $M_1, \dots, M_k$ telles que $M_1 \dots M_k A = I_n$, par conséquent $M_1 \dots M_k = A^{-1}$; mais A', la partie droite de la matrice B', est égale à $M_1 \dots M_k I_n$, autrement dit à $M_1 \dots M_k$: par conséquent $A' = A^{-1}$.

Appliquons cette technique sur un exemple concret : on cherche à déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, et le cas échéant à calculer son inverse. On commence par former la nouvelle matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Puis on applique l'algorithme de Gauss : on commence par remplacer L_2 par $L_2 - 4L_1$ et L_3 par $L_3 + L_1$ pour aboutir à la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Puis remplacer L_3 par $2L_3 + L_2$ nous amène à

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) .$$

Ensuite on remplace L_1 par $-\frac{1}{8}L_2 + \frac{5}{8}L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) .$$

Pour finir, remplacer L_1 par $L_1 - 2L_2 - L_3$ nous donne la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) .$$

On conclut que A est inversible, et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix} .$$

Remarquons que, si on appliquait la même méthode mais avec des opérations élémentaires sur les colonnes, on arriverait aussi à calculer l'inverse de A : en effet, on aurait ainsi trouvé des matrices élémentaires $M_1, \dots, M_k$ telles que $AM_1 \dots M_k = I_n$, par conséquent $M_1 \dots M_k = A^{-1}$. Par contre, si on appliquait cette méthode en alternant opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes, on obtiendrait des matrices élémentaires $M_1, \dots, M_k$ et $N_1, \dots, N_l$ telles que $M_1 \dots M_k A N_1 \dots N_l = I_n$, et alors il n'y a aucune raison que $M_1 \dots M_k N_1 \dots N_l$ soit l'inverse de A ! Moralité : on peut appliquer cette méthode en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes, mais au cours d'un même calcul il ne faut pas alterner entre lignes et colonnes - si on commence par des opérations élémentaires sur des lignes, par exemple, tout le calcul doit être mené en utilisant des opérations sur les lignes.

1.6 Un peu de vocabulaire sur les matrices carrées

Définition 1.22. $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$ (graphiquement : tous les coefficients en-dessous de la diagonale sont nuls). Elle est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour tout $j > i$.

Un intérêt de ces matrices : les systèmes dont la matrice associée est triangulaire sont très facile à résoudre !

Définition 1.23. $A \in M_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si elle est à la fois triangulaire supérieure et inférieure ; autrement dit, si $a_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$.

Définition 1.24. A est *symétrique* si $A = A^t$, c'est-à-dire $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout i, j ; elle est *antisymétrique* si $A = -A^t$, c'est-à-dire $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout i, j (en particulier, les coefficients sur la diagonale sont nuls !)

1.7 Résolution matricielle d'un système linéaire

Pour conclure ce chapitre, formulons en termes matriciels la méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires.

Définition 1.25. Soit $\mathcal{S}$ le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,m}x_m & = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,m}x_m & = y_2 \\ \qquad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,m}x_m & = y_n \end{cases}$$

On peut écrire $\mathcal{S}$ sous la forme $AX = Y$. La *matrice augmentée* est la matrice obtenue en ajoutant la colonne B tout à droite des colonnes de A.

Par exemple, considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

Sa matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot de Gauss consiste à mettre la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite ; chaque colonne de la matrice (sauf la dernière !) correspond à une des inconnues du système, et dans la forme échelonnée réduite de la matrice il y a deux types de colonnes : celles qui contiennent un pivot, et les autres. Chaque inconnue dont la colonne ne contient pas un pivot (peut-être qu'il n'y en a pas !) est une inconnue *libre* : on lui donne un nom ; ensuite, on exprime les inconnues dont la colonne contient un pivot en fonction des inconnues libres (ou on obtient des formules contradictoires si le système n'a pas de solution), et cela nous donne une description des solutions du système (s'il y en a !).

Revenons à l'exemple du système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

On a vu que sa matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

En faisant les opérations $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 + L_1$ on arrive à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Puis on peut par exemple faire $L_2 \to -\frac{1}{3}L_2$ et $L_3 \to L_3 + 2L_2$ pour arriver à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Ensuite, les opérations $L_3 \to \frac{1}{4}L_3$, puis $L_1 \to L_1 - 7L_3$ et $L_2 \to L_2 - 3L_3$ nous amènent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Une dernière opération pour se ramener à une matrice échelonnée réduite : après $L_1 \to L_1 - L_2$ on aboutit à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement, notre système de départ est équivalent au système suivant (dans ce cas, il n'y a pas d'inconnues libres) :

$$\begin{cases} x_1 & & & = 2 \\ & x_2 & & = 4 \\ & & x_3 & = -1 \end{cases}$$

En pratique, on n'a pas toujours besoin d'aller jusqu'à obtenir une forme échelonnée réduite : on échelonne la matrice jusqu'à aboutir à une matrice pour laquelle le système est facile à résoudre .

En regardant les systèmes associés aux matrices échelonnées réduites (cas auquel on peut toujours se ramener, comme on l'a vu plus haut), on voit que trois situations peuvent se produire :

1. Le système a exactement une solution (cas où la matrice est inversible)
2. Le système n'a pas de solutions (une ligne nulle dans la matrice échelonnée réduite alors que le b_i correspondant n'est pas nul)
3. Le système a une infinité de solutions.