Montrons que la famille de vecteurs $(f_1, f_2, f_3) = ((1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et calculons ensuite la matrice de φ dans cette base. Il nous faut d'abord montrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, et calculer son inverse ; on a vu dans le chapitre sur les matrices une méthode basée sur le pivot de Gauss qu'on pourrait appliquer ici. Il y a d'autres méthodes : par exemple, pour montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base il nous suffit de montrer qu'elle est génératrice (c'est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3), autrement dit qu'on peut exprimer (e_1, e_2, e_3) comme combinaisons linéaires de (f_1, f_2, f_3) ; et les coefficients de ces combinaisons linéaires nous donneront la matrice P^{-1}. On doit donc essayer d'exprimer (e_1, e_2, e_3) en fonction de (f_1, f_2, f_3), sachant qu'on a

$$\begin{cases} f_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 &= e_1 + e_2 \end{cases}$$

En considérant $L_1 - L_2$, on obtient que $2e_2 = f_1 - f_2$; et avec $L_1 - L_3$ on arrive à $e_3 = f_1 - f_3$. Il est alors facile d'obtenir

$$e_1 = f_3 - \frac{f_1 - f_2}{2} = -\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2 + f_3 \ .$$

On voit donc que l'espace vectoriel engendré par (f_1, f_2, f_3) contient e_1, e_2, e_3 et est donc égal à $\mathbb{R}^3$. Donc (f_1, f_2, f_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$; de plus on a calulé la matrice de passage de (f_1, f_2, f_3) à (e_1, e_2, e_3), autrement dit la matrice P^{-1}, qui est égale à

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer la matrice M' de φ dans la base (f_1, f_2, f_3) il nous reste à calculer

$$\begin{aligned} M' &= P^{-1} M P \\ &= (P^{-1} M) P \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 8 & 0 & -8 \end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Ceci revient à dire que $\varphi(f_1) = 2f_1$, $\varphi(f_2) = 2f_2$ et $\varphi(f_3) = 4f_3$; notons que la matrice M' est diagonale, et qu'il est beaucoup plus simple de comprendre les propriétés de φ en regardant M' que M. Par exemple, on voit immédiatement que φ est surjective et donc que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.25. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps et $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont *équivalentes* s'il existe deux matrices inversibles $P \in M_n(\mathbb{K})$ et $Q \in M_m(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

Si $n = m$ et qu'on peut écrire $A = P^{-1} BP$ pour une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$, alors on dit que A et B sont *semblables*.

Si on raisonne en termes d'applications linéaires : deux matrices équivalentes dans $M_{n,m}(\mathbb{K})$ peuvent être vues comme représentant la même application de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$ quitte à changer les bases au départ et à l'arrivée ; deux matrices semblables dans $M_n(\mathbb{K})$ peuvent être vues comme représentant la même application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ quitte à changer de base (avec la même base au départ et à l'arrivée).

3.5 Rang d'une matrice et de sa transposée

Définition 3.26. Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Le *rang* de A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A.

Autrement dit : si φ est l'application dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ est A, alors $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\varphi)$.

Proposition 3.27. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ deux matrices équivalentes. Alors* $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$*.*

Démonstration. Raisonnons en termes d'applications linéaires : si $\varphi \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ est une application linéaire et $\psi_1 \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\psi_2 \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ sont des automorphismes, alors le noyau de $\psi_1 \circ \varphi$ et celui de φ sont égaux, donc $\mathrm{rang}(\psi_1 \circ \varphi) = \mathrm{rang}(\varphi)$. Et l'image de $\psi_1 \circ \varphi \circ \psi_2$ et celle de $\psi_1 \circ \varphi$ sont égales, donc

$$\mathrm{rang}(\psi_1 \circ \varphi \circ \psi_2) = \mathrm{rang}(\psi_1 \circ \varphi) = \mathrm{rang}(\varphi) \ .$$

□

Théorème 3.28. *Soit $\mathbb{K}$ un corps $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ deux matrices. Alors* $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$ *si, et seulement si, A et B sont équivalentes.*

Démonstration. On vient de voir une implication ; si $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) = 0$ alors A et B sont nulles et donc équivalentes. Il nous suffit maintenant de montrer que, si $\mathrm{rang}(A) = r \geq 1$ alors A est équivalente C de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ de coefficients

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour cela, considérons l'application linéaire φ dont la matrice dans les bases canoniques $B_m = (e_1, \ldots, e_m)$, $B_n = (f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ est égale à A. Comme $\mathrm{rang}(\varphi) = r$, on sait qu'il existe $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ tels que $\varphi(e_{i_1}, \ldots, \varphi(e_{i_r})$ forment une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. En notant $f'_j = \varphi(e_{i_j})$, on peut compléter (si $r < n$; sinon on ne fait rien) la famille $(f'_1, \ldots, f'_r)$ en une base B'_n $(f'_1, \ldots, f'_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

En notant E le sous-espace vectoriel engendré par $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$, on sait que φ est injective sur E (elle envoie une base de E sur une famille libre) donc $E \cap \ker(\varphi) = \{0\}$. Comme de plus $\dim(E) + \dim(\ker(\varphi)) = \mathrm{rang}(\varphi) + \dim(\ker(\varphi)) = m$, on en déduit que E et $\ker(\varphi)$ sont supplémentaires. Si $\ker(\varphi) \neq \{0\}$, on peut donc compléter $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = (e'_1, \ldots, e'_r)$ en une base $B'_m = (e'_1, \ldots, e'_m)$ de $\mathbb{K}^m$. Par construction, on a $\varphi(e'_i) = f'_i$ si $1 \leq i \leq r$, et $\varphi(e'_i) = 0$ sinon. Autrement dit, la matrice de φ dans les bases B'_m, B'_n est égale à C ; si on note P la matrice de passage de B_m à B'_m et Q la matrice de passage de B_n à B'_n, on vient de montrer que $C = Q^{-1}AP$, autrement dit A et C sont équivalentes.

□

Proposition 3.29. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A et celui de A^t sont égaux.*

Démonstration. Soit $r = \mathrm{rang}(A)$. En notant comme ci-dessus C la matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ de coefficients

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(qui est la matrice nulle si $r = 0$) on a des matrices inversibles $P \in M_m(\mathbb{K})$ et $Q \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $A = QCP$. En transposant, cela nous donne $A^t = P^t C^t Q^t$. Comme P^t et Q^t sont inversibles, on en déduit que A^t est équivalente à C^t ; et manifestement C^t est de rang r, donc $\mathrm{rang}(A^t) = r$. □

Exercice 3.30. Soit $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rang}(AB) \leq \max(\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B))$.

3.6 Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

Définition 3.31. Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. La *trace* de A, notée $\mathrm{tr}(A)$, est le scalaire $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Proposition 3.32. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.*

Démonstration. Le coefficient sur la i-ème ligne et la i-ième colonne de AB est égal à

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}$$

On en déduit l'égalité

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \right) .$$

En échangeant le rôle de A et B dans cette formule, on obtient

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i} \right) .$$

En permutant les deux sommes, on arrive bien à

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} b_{i,k} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \right) = \mathrm{tr}(AB) .$$

□

Proposition 3.33. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps et $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.*

Démonstration. Par définition, il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. On peut alors écrire

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}(BP)) = \mathrm{tr}((BP)P^{-1}) = \mathrm{tr}(B) .$$

□

Proposition 3.34. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un espace vectoriel de dimension finie, et φ un endomorphisme de E. Alors pour toutes bases B, B' on a*

$$\mathrm{tr}(M(\varphi)_{B \to B}) = \mathrm{tr}(M(\varphi)_{B' \to B'}) .$$

On appelle cette valeur la trace de φ et on la note $\mathrm{tr}(\varphi)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la question précédente, puisque si P désigne la matrice de passage de B à B' on sait que $M(\varphi)_{B' \to B'} = P^{-1} M(\varphi)_{B \to B} P$. □

3.7 Sous-espaces vectoriels et endomorphismes de $\mathbb{R}^n$

On a vu plus haut que, pour tout sous-espace vectoriel E de dimension k dans $\mathbb{R}^n$, il existe une application linéaire surjective $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ telle que $E = \ker(\varphi)$. En d'autre termes il existe une matrice $A \in M_{n-k,n}(\mathbb{R})$ de rang $n - k$ et telle que E est égal à l'ensemble

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \forall i \in \{1, \ldots, n-k\} \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0\} .$$

On appelle l'identité ci-dessus une *équation cartésienne* de E ; vous avez déjà vu de telles équations. Par exemple, un espace vectoriel de dimension 1 dans $\mathbb{R}^2$ est une droite D, et en donner une équation cartésienne revient à trouver deux réels non nuls a, b tels que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon ax + by = 0\}$$

Dans $\mathbb{R}^3$, il va nous falloir deux équations (non proportionnelles !) pour définir une droite D, qu'on décrira comme l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 & = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 & = 0 \end{cases} .$$

En général, un sous-espace de dimension k dans $\mathbb{R}^n$ peut donc se décrire comme l'ensemble des solutions de système de $n-k$ équations à n inconnues. Un cas particulier important est celui où il n'y a qu'une équation.

Définition 3.35. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $=\geq 1$. Un sous-espace vectoriel F de E est un *hyperplan* si $\dim(F) = \dim(E) - 1$.

Par exemple, un hyperplan de $\mathbb{R}^2$ est une droite ; un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est ce qu'on a l'habitude d'appeler un plan.

Finissons ce chapitre en décrivant les matrices d'applications linéaires bien connues (?) dans des bases bien choisies.

Définition 3.36. Soit E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $E \oplus F = \mathbb{R}^n$. La *projection* sur E parallèlement à F est l'unique application linéaire p telle que $p(e) = e$ pour tout $e \in E$ et $p(f) = 0$ pour tout $f \in F$.

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \{0\}$, la projection définie ci-dessus est simplement l'identité ; si $E = \{0\}$ et $F = \mathbb{R}^n$, c'est l'application nulle. Dans le cas où ni E ni F n'est réduit à $\{0\}$, notons que, si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de E et $(f_{k+1}, \ldots, f_n)$ est une base de F, alors $(e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et la matrice de la projection sur E parallèlement à F dans cette base est la matrice diagonale qui s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 3.37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et p une application linéaire telle que $p^2 = p$. On dit que p est un *projecteur*.

Proposition 3.38. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et p un projecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors p est la projection sur* $\mathrm{Im}(p)$ *parallèlement à* $\ker(p)$.

Démonstration. On doit en particulier montrer que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$. Si $x \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$ alors on a à la fois $p(x) = 0$ et $x = p(y)$ pour un certain $y \in \mathbb{R}^n$, donc

$$0 = p(x) = p(p(y)) = p(y) = x \ .$$

On vient de montrer que $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$; comme $\dim(\ker(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) = n$, ceci suffit à montrer que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires.

On aurait tout aussi bien pu montrer directement que $\mathbb{R}^n = \ker(p) + \mathrm{Im}(p)$: pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on peut écrire $x = (x - p(x)) + p(x)$, et $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$. Donc x est la somme d'un élément de $\ker(p)$ et d'un élément de $\mathrm{Im}(p)$.

Ensuite, il est clair que $p(x) = 0$ pour tout $x \in \ker(p)$; et pour tout $x \in \mathrm{Im}(p)$ on a déjà vu (où ?) que $p(x) = x$. Donc p est bien la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$. □

Exercice 3.39. Montrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Définition 3.40. Soit E, F deux sous-espaces vectoriels tels que $E \oplus F = \mathbb{R}^n$. La *symétrie* par rapport à E parallèlement à F est l'unique application linéaire S telle que $S(e) = e$ pour tout $e \in E$ et $S(f) = -f$ pour tout $f \in F$.

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \{0\}$, la symétrie définie ci-dessus est simplement l'identité ; si $E = \{0\}$ et $F = \mathbb{R}^n$, c'est $-id$. Dans le cas où ni E ni F n'est réduit à $\{0\}$, on a comme précédemment que si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de E et $(f_{k+1}, \ldots, f_n)$ est une base de F, alors $(e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et la matrice de la symétrie sur E parallèlement à F dans cette base est la matrice diagonale qui s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix} .$$

Proposition 3.41. *Soit S un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $S^2 = id$. On dit que S est une* symétrie *et S est la symétrie par rapport à* $\ker(S - id)$ *parallèlement à* $\ker(S + id)$.

Démonstration. Soit $E = \ker(S - id)$ et $F = \ker(S + id)$. Par définition, $S(e) = e$ pour tout $e \in E$ et $S(f) = -f$ pour tout $f \in F$, donc on doit simplement montrer que E et F sont supplémentaires. Pour cela, considérons $x \in E \cap F$: on a alors à la fois $(Sx) = x$ puisque $x \in E$, et $S(x) = -x$ puisque $x \in F$, donc $x = -x$ et par conséquent $x = 0$.

Pour montrer que $E + F = \mathbb{R}^n$, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $x - S(x) \in F$ et $x + S(x) \in E$: en effet,

$$S(x - S(x)) = S(x) - S^2(x) = S(x) - x = -(x - S(x)) \quad \text{et} \quad S(x + S(x)) = S(x) + S^2(x) = S(x) + x \ .$$

A partir de l'égalité

$$x = \frac{1}{2}\left((x + S(x)) + (x - S(x))\right)$$

on conclut donc que tout élément de $\mathbb{R}^n$ appartient à $E + F$, donc $E \oplus F = \mathbb{R}^n$. □

Exercice 3.42. Montrer que si p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$ alors $x \mapsto 2p(x) - x$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Montrer que si S est une symétrie de $\mathbb{R}^n$ alors $p = \frac{S+id}{2}$ est la projection sur $\ker(S - id)$ parallèlement à $\ker(S + id)$.

En plus des projections et des symétries, rappelons la forme d'une matrice de *rotation* dans $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^2$, la rotation d'angle θ envoie le vecteur $(1, 0)$ sur $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et le vecteur $(0, 1)$ sur $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$; sa matrice dans la base canonique est donc égale à $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Pour décrire les matrices de rotations dans $\mathbb{R}^3$, il nous faudrait introduire la notion d'orthogonalité de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ce qu'on ne va pas faire ici.