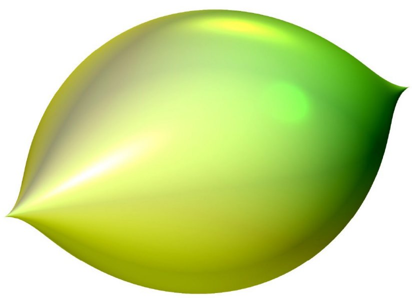
1. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (b) Déterminer les points critiques de f situés à l'intérieur du cercle unité $S = \{(x,y)\,;\ x^2+y^2 = 1\}$ et leur nature.
   (c) Que peut-on dire des extrema de f sur S ?
   (d) Déterminer les points de S auxquels f atteint ses bornes sur S.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(x,y) = e^{x^2-y^2}\,\cos(2xy)$.
   (a) Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (b) Calculer $\nabla h(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (c) Déterminer les points critiques de h et leur nature.
3.



Zitrus $x^2+z^2 = y^3(1-y)^3$

On s'intéresse à l'ensemble C des points (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ définis par l'équation

$$x^2 + y^2 = y^3(1-y)^3 \,.$$

   (a) Montrer que C est borné. (On commencera par vérifier que si $(x,y,z) \in C$ alors $y \in [0,1]$, puis on donnera un majorant pout (x,z).)
   (b) Déterminer les points (x_0,y_0,z_0) au voisinage desquels l'ensemble C est paramétré par (x,y), c'est-à-dire admettant un voisinage V tel que

$$V \cap C = \{(x,y,z)\,;\ z = \varphi(x,y)\,,\ (x,y) \in W\}\,,$$

   où W est un voisinage de (x_0,y_0).
   (c) De façon analogue, déterminer les points (x_0,y_0,z_0) au voisinage desquels l'ensemble C est paramétré par (y,z) ou par (x,z). (Interpréter ces résultats sur la figure ci-contre.)
   (d) Montrer que la fonction $G : (x,y,z) \mapsto x+z$ atteint ses bornes sur C.
   (e) Déterminer les points de C où G atteint ses bornes.
4.

On s'intéresse à l'ensemble H des points (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ définis par l'équation

$$(x^2 + \tfrac{9}{4}y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2z^3 - \tfrac{9}{80}y^2z^3 \;=\; 0\,.$$

Trouver des points (x_0,y_0,z_0) au voisinage desquels l'ensemble H est paramétré par (x,y), ou bien par (y,z), ou bien par (x,z).