Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020
Analyse III Durée : 1 heure 30 minutes

Examen de seconde session du mercredi 24 juin 2020

Règlement – L'épreuve dure $1h30$. Rappeler sur votre copie le numéro du sujet qui se trouve en haut à droite de votre énoncé (premier numéro précédé de +)
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
Les cases bleues indiquent le barème de chaque exercice.
Les photos ou scans rendus doivent être lisibles et NON FLOUS, rassemblés sous la forme d'un unique fichier pdf et déposés dans la case intitulée Rendu CT Session2 de votre suivi Tomuss d'automne.

Question 1 **Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \ln n}$. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non.** **1.5**

Question 2 **Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n^2 + 2n + \ln(n)}$. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non.** **1**

Question 3 **Déterminer si la fonction $f : (x, y, z) \longmapsto \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ admet une limite lorsque $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$.** **1.5**

Question 4 **On considère la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. **Justifier brièvement la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.**
2. **Montrer que f est continue en $(0,0)$.**
3. **Justifier brièvement que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et les calculer.**
4. **La fonction f admet-elle des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ par rapport à chacune de ses variables en $(0,0)$? Les calculer lorsque cela est possible.**

3.5

Question 5 **On considère la suite de fonctions $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+e^{nx}}$.**

1. **Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on explicitera.**
2. **(a) Montrer que la fonction $u \longmapsto ue^{-u}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.**
   (b) En déduire que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.
3. **Montrer que la suite des fonctions dérivées $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g.**
4. **La convergence de $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ vers g est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?**

6.5

Question 6 **Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2}-1}{x^4}\mathrm{d}x$.** **1.5**

Question 7 **Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.**

1. **(a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.**
   (b) Montrer que $F(0)$ est bien définie. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, déterminer la valeur de $F(0)$.
2. **Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.**
3. **Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et exprimer F' à l'aide d'une intégrale.**

On ne le demande pas, mais une décomposition en éléments simples permet alors d'obtenir une expression explicite de F' puis de F sans intégrale. **6.5**

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés
à l'aide de auto-multiple-choice.

Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020
Analyse III Durée : 1 heure 30 minutes

Examen de seconde session du mercredi 24 juin 2020

Règlement – L'épreuve dure $1h30$. Rappeler sur votre copie le numéro du sujet qui se trouve en haut à droite de votre énoncé (premier numéro précédé de +)
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
Les cases bleues indiquent le barème de chaque exercice.
Les photos ou scans rendus doivent être lisibles et NON FLOUS, rassemblés sous la forme d'un unique fichier pdf et déposés dans la case intitulée Rendu CT Session2 de votre suivi Tomuss d'automne.

Question 1 **Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non.**

1.5

Question 2 **Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n^4+2n+\cos(n)}$. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non.** **1**

Question 3 **Déterminer si la fonction $f : (x,y,z) \longmapsto \dfrac{xy+y^2+xz}{x^2+y^2+z^2}$ admet une limite lorsque $(x,y,z) \to (0,0,0)$.**

1.5

Question 4 **On considère la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. **Justifier brièvement la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.**
2. **Montrer que f est continue en $(0,0)$.**
3. **Justifier brièvement que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et les calculer.**
4. **La fonction f admet-elle des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ par rapport à chacune de ses variables en $(0,0)$? Les calculer lorsque cela est possible.**

3.5

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés
à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 5 **On considère la suite de fonctions $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+e^{nx}}$.**

1. **Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on explicitera.**
2. **(a) Montrer que la fonction $u \longmapsto ue^{-u}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.**
   (b) En déduire que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.
3. **Montrer que la suite des fonctions dérivées $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g.**
4. **La convergence de $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ vers g est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?**

6.5

Question 6 **Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.** **1.5**

Question 7 **Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.**

1. **(a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.**
   (b) Montrer que $F(0)$ est bien définie. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, déterminer la valeur de $F(0)$.
2. **Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.**
3. **Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et exprimer F' à l'aide d'une intégrale.**

On ne le demande pas, mais une décomposition en éléments simples permet alors d'obtenir une expression explicite de F' puis de F sans intégrale. **6.5**

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés
à l'aide de auto-multiple-choice.

Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020
Analyse III Durée : 1 heure 30 minutes

Examen de seconde session du mercredi 24 juin 2020

Règlement – L'épreuve dure $1h30$. Rappeler sur votre copie le numéro du sujet qui se trouve en haut à droite de votre énoncé (premier numéro précédé de +)
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
Les cases bleues indiquent le barème de chaque exercice.
Les photos ou scans rendus doivent être lisibles et NON FLOUS, rassemblés sous la forme d'un unique fichier pdf et déposés dans la case intitulée Rendu CT Session2 de votre suivi Tomuss d'automne.

Question 1 **Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + \sqrt{n}}$. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non.** **1.5**

Question 2 **Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n^3 + 6n\sin(n) + 1}$. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non.** **1**

Question 3 **Déterminer si la fonction $f : (x, y, z) \longmapsto \dfrac{xy + yz}{x^2 + 2y^2 + z^2}$ admet une limite lorsque $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$.** **1.5**

Question 4 **On considère la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. **Justifier brièvement la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.**
2. **Montrer que f est continue en $(0,0)$.**
3. **Justifier brièvement que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et les calculer.**
4. **La fonction f admet-elle des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ par rapport à chacune de ses variables en $(0,0)$? Les calculer lorsque cela est possible.**

3.5

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés
à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 5 **On considère la suite de fonctions $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+e^{nx}}$.**

1. **Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on explicitera.**
2. **(a) Montrer que la fonction $u \longmapsto ue^{-u}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.**
   (b) En déduire que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.
3. **Montrer que la suite des fonctions dérivées $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g.**
4. **La convergence de $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ vers g est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?**

6.5

Question 6 **Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.** **1.5**

Question 7 **Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.**

1. **(a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.**
   (b) Montrer que $F(0)$ est bien définie. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, déterminer la valeur de $F(0)$.
2. **Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.**
3. **Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et exprimer F' à l'aide d'une intégrale.**

On ne le demande pas, mais une décomposition en éléments simples permet alors d'obtenir une expression explicite de F' puis de F sans intégrale. **6.5**

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés
à l'aide de auto-multiple-choice.

Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020
Analyse III Durée : 1 heure 30 minutes

Examen de seconde session du mercredi 24 juin 2020

Règlement – L'épreuve dure $1h30$. Rappeler sur votre copie le numéro du sujet qui se trouve en haut à droite de votre énoncé (premier numéro précédé de +)
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
Les cases bleues indiquent le barème de chaque exercice.
Les photos ou scans rendus doivent être lisibles et NON FLOUS, rassemblés sous la forme d'un unique fichier pdf et déposés dans la case intitulée Rendu CT Session2 de votre suivi Tomuss d'automne.

Question 1 **Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non.**

1.5

Question 2 **Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n^3+6n\sin(n)+1}$. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non.**

1

Question 3 **Déterminer si la fonction $f : (x,y,z) \longmapsto \dfrac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2}$ admet une limite lorsque $(x,y,z) \to (0,0,0)$.**

1.5

Question 4 **On considère la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{1/4}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. **Justifier brièvement la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.**
2. **Montrer que f est continue en $(0,0)$.**
3. **Justifier brièvement que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et les calculer.**
4. **La fonction f admet-elle des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ par rapport à chacune de ses variables en $(0,0)$? Les calculer lorsque cela est possible.**

3.5

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés
à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 5 **On considère la suite de fonctions $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+e^{nx}}$.**

1. **Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on explicitera.**
2. **(a) Montrer que la fonction $u \longmapsto ue^{-u}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.**
   (b) En déduire que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.
3. **Montrer que la suite des fonctions dérivées $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g.**
4. **La convergence de $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ vers g est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?**

6.5

Question 6 **Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.** **1.5**

Question 7 **Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.**

1. **(a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.**
   (b) Montrer que $F(0)$ est bien définie. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, déterminer la valeur de $F(0)$.
2. **Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.**
3. **Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et exprimer F' à l'aide d'une intégrale.**

On ne le demande pas, mais une décomposition en éléments simples permet alors d'obtenir une expression explicite de F' puis de F sans intégrale. **6.5**

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés
à l'aide de auto-multiple-choice.

Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020
Analyse III Durée : 1 heure 30 minutes

Examen de seconde session du mercredi 24 juin 2020

Règlement – L'épreuve dure $1h30$. Rappeler sur votre copie le numéro du sujet qui se trouve en haut à droite de votre énoncé (premier numéro précédé de +)
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
Les cases bleues indiquent le barème de chaque exercice.
Les photos ou scans rendus doivent être lisibles et NON FLOUS, rassemblés sous la forme d'un unique fichier pdf et déposés dans la case intitulée Rendu CT Session2 de votre suivi Tomuss d'automne.

Question 1 **Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \ln n}$. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non.** **1.5**

Question 2 **Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n^4 + 2n + \cos(n)}$. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non.** **1**

Question 3 **Déterminer si la fonction $f : (x, y, z) \longmapsto \dfrac{xy + yz}{x^2 + 2y^2 + z^2}$ admet une limite lorsque $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$.** **1.5**

Question 4 **On considère la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. **Justifier brièvement la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.**
2. **Montrer que f est continue en $(0,0)$.**
3. **Justifier brièvement que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et les calculer.**
4. **La fonction f admet-elle des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ par rapport à chacune de ses variables en $(0,0)$? Les calculer lorsque cela est possible.**

3.5

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés
à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 5 **On considère la suite de fonctions $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+e^{nx}}$.**

1. **Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on explicitera.**
2. **(a) Montrer que la fonction $u \longmapsto ue^{-u}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.**
   (b) En déduire que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.
3. **Montrer que la suite des fonctions dérivées $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g.**
4. **La convergence de $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ vers g est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?**

6.5

Question 6 **Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.** **1.5**

Question 7 **Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.**

1. **(a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.**
   (b) Montrer que $F(0)$ est bien définie. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, déterminer la valeur de $F(0)$.
2. **Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.**
3. **Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et exprimer F' à l'aide d'une intégrale.**

On ne le demande pas, mais une décomposition en éléments simples permet alors d'obtenir une expression explicite de F' puis de F sans intégrale. **6.5**

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés
à l'aide de auto-multiple-choice.