Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023

Analyse IV Durée: 2 heures

Examen final du mardi 9 mai 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème total sera sur environ 26 *points pour prendre en compte la longueur du sujet.*

Exercice 1. Dans tout l'exercice, on note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Pour $P \in E$, on note $N(P) = \sup_{t\in[0;1]} |P'(t)| + |P(0)|$. Montrer que N définit une norme sur E.
2. On admet que l'application $\|\,.\,\|_\infty$ définie par

$$\forall P \in E, \quad \|P\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|$$

est aussi une norme sur E. Montrer que pour tout $P \in E$, $\|P\|_\infty \leq N(P)$. Indication : on pourra commencer par exprimer $P(t) - P(0)$ à l'aide d'une intégrale faisant intervenir P'.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} X^n$. Étudier la convergence de la suite vectorielle $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ ainsi que pour la norme N.
4. Les normes N et $\|\,.\,\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
5. On considère l'application linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P'(1/2) + 7P(0). \end{array}$$

Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}[X]$ pour la norme N.

6. On note $F = \{P \in E \mid 2P'(1/2) + 14P(0) \geq 5\}$.
   (a) Montrer que F est un fermé de E pour la norme N.
   (b) L'ensemble F est-il compact pour la norme N ?
7. Soit $G = \{P \in E \mid P(1/4)P(1/2) < 0\}$. Montrer que G est un ouvert pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 + x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les expliciter.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
5. Quelle est le plus grand $k \in \mathbb{N}$ pour lequel f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^2$?
6. La fonction f est-elle différentiable en $(0,-1)$? Si oui, expliciter $\mathrm{d}f(0,-1)$.

Exercice 3. L'objectif de l'exercice est de calculer explicitement la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction $\psi_a : t \longmapsto \dfrac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et que F est solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y'(x) = y(x) - \dfrac{I}{\sqrt{x}}$.

En utilisant les méthodes de résolution usuelles des équations différentielles, on pourrait montrer sans difficulté **-il n'est pas demandé de le faire-** l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = e^x \left(\lambda - I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \right).$$

On pourra utiliser cette formule sans preuve dans la suite.

4. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $F(0)$ et en déduire la valeur de λ.
5. Montrer que pour $x > 0$, $F(x) \leq \dfrac{I}{\sqrt{x}}$ et en déduire la limite de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
6. En déduire la valeur de I.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}.$$

1. Déterminer les points critiques de f et étudier leur nature.
2. On note $\mathcal{D} = \{((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9 \text{ et } x \geq 0\}$.
   (a) Représenter graphiquement $\mathcal{D}$.
   (b) Justifier que f admet un minimum et un maximum global sur $\mathcal{D}$.
   (c) Déterminer le minimum et le maximum global de f sur $\mathcal{D}$. En quels points sont-ils atteints ?
3. Montrer que f n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'examen terminal d'analyse iv du 9 mai 2023

Correction de l'exercice 1

1. Tout d'abord l'application N est bien définie sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. En effet, pour $P \in E$, l'application $t \longmapsto |P'(t)|$ est continue sur le segment $[0;1]$, donc elle est bornée sur ce segment, et à valeurs positives, ainsi $N(P) \in \mathbb{R}^+$. Soient $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors comme $|\lambda| \geq 0$,

$$N(\lambda P) = \sup_{t\in[0;1]} |\lambda P'(t)| + |\lambda P(0)| = \sup_{t\in[0;1]} |\lambda|\,|P'(t)| + |\lambda|\,|P(0)| = |\lambda|\,N(P)$$

donc N vérifie la propriété d'homogénéité. Soit $P \in E$, la somme de deux termes positifs étant nulle si, et seulement si, chacun des termes est nul,

$$N(P) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \sup\limits_{t\in[0;1]} |P'(t)| = 0 \\ |P(0)| = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \forall t \in [0;1], \quad P'(t) = 0 \\ P(0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} P' = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ P(0) = 0 \end{array}\right.$$

puisque seul le polynôme nul admet une infinité de racines. Ainsi,

$$N(P) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \exists a \in \mathbb{R}, \quad P = a \\ P(0) = 0 \end{array}\right. \iff P = 0_E$$

donc N vérifie la propriété de séparation. Enfin, soient $P, Q \in E$, alors pour tout $t \in [0;1]$,

$$|(P+Q)'(t)| = |P'(t) + Q'(t)| \leq |P'(t)| + |Q'(t)| \leq \sup_{x\in[0;1]} |P'(x)| + \sup_{x\in[0;1]} |Q'(x)|\,.$$

Puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble, on en déduit que $\sup\limits_{t\in[0;1]} |(P+Q)'(t)| \leq \sup\limits_{x\in[0;1]} |P'(x)| + \sup\limits_{x\in[0;1]} |Q'(x)|$. Comme de plus par inégalité triangulaire, $|P(0) + Q(0)| \leq |P(0)| + |Q(0)|$, il vient :

$$N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$$

ce qui achève de démontrer que N est une norme sur E.

2. Soit $t \in [0;1]$. Puisque $t \longmapsto P(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, on peut écrire $P(t) - P(0) = \displaystyle\int_0^t P'(u)\,\mathrm{d}u$ ce qui entraîne

$$\begin{array}{rcl} |P(t)| & = & \left| P(0) + \displaystyle\int_0^t P'(u)\,\mathrm{d}u \right| \\ & \leq & |P(0)| + \displaystyle\int_0^t |P'(u)|\,\mathrm{d}u \\ & \leq & |P(0)| + \sup\limits_{u\in[0;1]} |P'(u)| \displaystyle\int_0^t \mathrm{d}u \\ & \leq & N(P) \quad \text{puisque} \displaystyle\int_0^t \mathrm{d}u = t \leq 1 \end{array}$$

Ainsi, par définition de la borne supérieure, on a : $\|P\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0;1]} |P'(t)| \leq N(P)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par croissance de la fonction $t \longmapsto t^n$ sur $[0;1]$,

$$\|P_n\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} t^n \right| = \sup_{t\in[0;1]} \frac{1}{\sqrt{n}} t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} 1^n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui démontre que $\|P_n\|_\infty = \|P_n - 0_E\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$.

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$N(P_n) = \sup_{t\in[0;1]} \left|\frac{n}{\sqrt{n}} t^{n-1}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{n}} 0^n\right| = \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Si la suite $(P_n)_n$ convergeait vers $P \in E$ pour la norme N, la suite réelle $(N(P_n))_n$ convergerait vers $N(P)$. Ceci étant impossible d'après le calcul de limite ci-dessus, on en déduit que la suite vectorielle $(P_n)_n$ diverge pour la norme N.

4. Comme deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes (et que celles-ci convergent alors vers la même limite pour les deux normes), le fait que la suite vectorielle $(P_n)_n$ converge pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ mais diverge pour la norme N démontre que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

5. Soit $P \in E$,

$$|\varphi(P)| = |P'(1/2) + 7P(0)| \leq |P'(1/2)| + 7\,|P(0)| \leq 7\,(|P'(1/2)| + |P(0)|) \leq 7\left(\sup_{t\in[0;1]} |P'(t)| + |P(0)|\right) \leq 7N(P).$$

D'après les caractérisations équivalentes de la continuité d'une application linéaire, on en déduit que φ est continue sur E pour la norme N.

6. (a) On peut transformer F de manière à écrire

$$F = \{P \in E \mid \varphi(P) \geq 5/2\} = \varphi^{-1}([5/2; +\infty[).$$

Comme φ est continue sur l'espace vectoriel E pour la norme N, et $[5/2; +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ (en tant qu'intervalle fermé), F est un fermé de E pour la norme N en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

(b) Un compact de E est nécessairement un ensemble fermé et borné de E (pour la norme considérée). Or, pour tout réel $C \geq 5/14$, le polynôme constant $Q = C$ appartient à F puisque $2Q'(1/2) + 14Q(0) = 14C \geq 5$, et vérifie $N(Q) = |C| = C$. Ainsi, il ne peut pas exister de constante $M \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $P \in F$, $N(P) \leq M$, ce qui démontre que l'ensemble F n'est pas borné pour la norme N. Par conséquent, F n'est pas un compact de E pour la norme N.

7. On sait que l'ensemble G est un ouvert de E pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ si, et seulement si, son complémentaire $E\backslash G$ est un fermé de E pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$, où

$$E\backslash G = \{P \in E \mid P(1/4)P(1/2) \geq 0\}.$$

Soit $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E\backslash G$ qui converge vers un polynôme $R \in E$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$. Alors pour tout $t \in [0;1]$,

$$0 \leq |R_n(t) - R(t)| \leq \|R_n - R\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui entraîne que $R_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} R(t)$. Comme de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n \in E\backslash G$, on dispose de l'inégalité

$$R_n(1/4)R_n(1/2) \geq 0$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$ dans celle-ci, la préservation des inégalités larges par passage à la limite entraîne finalement $R(1/4)R(1/2) \geq 0$. Par suite, R appartient à $E\backslash G$, donc $E\backslash G$ est un fermé de E pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ par caractérisation séquentielle des fermés, ce qui permet de conclure que G est un ouvert de E pour $\|\,.\,\|_\infty$.

Correction de l'exercice 2

1. Sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, la fonction f est donnée par $(x,y) \longmapsto \dfrac{xy^3+x^4}{x^2+y^2}$. Ainsi, $f_{|U}$ est le quotient de la fonction polynomiale $g : (x,y) \in U \longmapsto xy^3+x^4$ par la fonction polynomiale $h : (x,y) \longmapsto x^2+y^2$. Comme ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et que la fonction h ne s'annule pas sur U, on en déduit que $f_{|U}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. Puisque U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, cela démontre que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U.

2. On vient de voir que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, donc elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur U (et celles-ci sont continues sur U). De plus, pour tout $(x,y) \in U$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y^3+4x^3)(x^2+y^2)-(xy^3+x^4)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5+2x^5-x^2y^3+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2)-(xy^3+x^4)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy(3x^2y+y^3-2x^3)}{(x^2+y^2)^2}.$$
On s'intéresse donc à l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f en $(0,0)$. On sait que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe si, et seulement si, la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ selon le vecteur $(1,0)$ existe. On est donc ramené à étudier l'existence de la limite, lorsque $t \to 0$, du taux d'accroissement suivant : soit $t \in \mathbb{R}^*$
$$\frac{1}{t}\left(f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)\right) = \frac{1}{t}f(t,0) = \frac{1}{t}\frac{t^4}{t^2} = t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$
ce qui démontre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. De même, pour $t \in \mathbb{R}^*$,
$$\frac{1}{t}\left(f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)\right) = \frac{1}{t}f(0,t) = \frac{1}{t}\times 0 = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$
ce qui démontre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

3. On a déjà vu que les dérivées partielles d'ordre 1 de f existent sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues sur U. Il reste donc à étudier leur continuité en $(0,0)$. Soit $(x,y) \in U$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ tels que $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$, d'où
$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= \frac{\left|y^5+2x^5-x^2y^3+4x^3y^2\right|}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{r^5\left|\sin^5(\theta)+2\cos^5(\theta)-\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+4\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)\right|}{r^4} \\ &\leq r(|\sin(\theta)|^5+2|\cos(\theta)|^5+\cos^2(\theta)|\sin(\theta)|^4+4|\cos(\theta)|^3\sin^2(\theta)) \\ &\leq 8r = 8\|(x,y)\|_2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$
ce qui démontre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et prouve la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. De même, en passant comme ci-dessus en coordonnées polaires par exemple, on a pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 6r = 6\|(x,y)\|_2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$
ce qui démontre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et prouve la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. Finalement, la fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. La dérivée partielle d'ordre 2 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe si, et seulement si, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à sa première variable en $(0,0)$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$,
$$\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)+t(1,0))-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 0. De même, pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}((0,0)+t(0,1)) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{t}\frac{t^5}{t^4} = 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut 1.

5. On a vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc en particulier de classe $\mathcal{C}^0$) sur $\mathbb{R}^2$. Si elle était de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwarz entraînerait l'égalité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$, ce qui serait contradictoire car ces deux fonctions ne prennent pas la même valeur en $(0,0)$ d'après la question précédente. Ainsi, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc le plus grand $k \in \mathbb{N}$ pour lequel f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^2$ est $k=1$.

6. Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle est en particulier différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, elle est différentiable en $(0,-1)$ et

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f(0,-1): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (h,k) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1)k = -h. \end{array}$$

Correction de l'exercice 3

1. Posons $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{(1+t)\sqrt{t}}$ pour tout $(x,t) \in U := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*$ de sorte que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$. On peut écrire f sous la forme $f = \dfrac{\exp \circ g}{\varphi \circ h}$ avec

$$g : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & -xt \end{array}, \quad h : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x,t) & \longmapsto & t \end{array} \quad \text{et } \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1+t)\sqrt{t}. \end{array}$$

Les fonctions g et h sont polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, h est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles, et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier continue sur U. De plus, pour tout $(x,t) \in U$, $-xt \leq 0$ donc $e^{-xt} \leq 1$ et ainsi

$$|f(x,t)| = \frac{e^{-xt}}{(1+t)\sqrt{t}} \leq \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} := \varphi(t).$$

La fonction φ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs positives, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus, lorsque $t \to 0$,

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}$$

Par la règle de Riemann, comme $\dfrac{1}{2} < 1$, la fonction φ est intégrable sur $]0;1]$. Lorsque $t \to +\infty$, on a de même

$$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{3/2}}$$

avec $\dfrac{3}{2} > 1$, donc la fonction φ est intégrable sur $[1;+\infty[$. Par conséquent, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de continuité par domination, on en déduit que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. La fonction ψ_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, équivalente à $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1/2}}$ au voisinage de 0, donc intégrable sur $]0;1]$. De plus, comme $a > 0$, par croissances comparées,

$$\frac{\psi_a(t)}{1/t^2} = t^{3/2}e^{-at} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{d'où} \quad \psi_a(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui entraîne par comparaison que ψ_a est intégrable sur $[1;+\infty[$. Ainsi, ψ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On a déjà démontré les deux premières hypothèses du théorème de dérivation par domination. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, $\frac{\partial f}{\partial x}$, qui est continue sur U. De plus, pour tout $(x,t) \in U$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t}{(1+t)\sqrt{t}} e^{-xt}.$$
Si on essaie de majorer la valeur absolue de cette expression indépendamment de x, on obtient une majoration par une fonction qui n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. On va donc plutôt chercher à utiliser le corollaire du théorème de domination et restreindre le domaine du x. Soit $[a;b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$). Pour tout $(x,t) \in [a;b] \times \mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| &= \frac{t}{(1+t)\sqrt{t}} e^{-xt} \\ &\leq \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}} = \psi_a(t) \quad \text{puisque} \quad t \leq 1+t, \quad xt \geq at \end{aligned}$$
et par décroissance de la fonction $u \longmapsto e^{-u}$. Or, par la question précédente, la fonction ψ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le corollaire du théorème de dérivation par domination, on en déduit que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)\sqrt{t}} e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{1+t-1}{(1+t)\sqrt{t}} e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \sqrt{x} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u \quad \text{par le changement de variable } u = xt \\ &= F(x) - \frac{I}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

4. Par le changement de variable $u = \sqrt{t}$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ ce qui entraîne
$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [2\arctan(u)]_0^{+\infty} = \pi.$$
Comme pour tout $x > 0$,
$$F(x) = e^x \left(\lambda - I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right)$$
par continuité de F en 0, on obtient
$$\pi = F(0) = \lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x \left(\lambda - I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right) = \lambda$$
car $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est intégrable sur $]0;1]$, donc $\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

5. Soit $x > 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{1+t} \leq 1$, d'où par le calcul ci-dessus
$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$
Le théorème des gendarmes démontre alors que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. Par l'égalité donnée dans l'énoncé, il vient

$$F(x)e^{-x} = \pi - I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t$$

d'où en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$ (possible car $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$0 = \pi - I \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t = \pi - I^2 \quad \text{d'où } I = \sqrt{\pi}.$$

Correction de l'exercice 4

1. On peut décomposer f sous la forme $f = g \times \exp \circ h$ où $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$ et $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto -x$ sont deux fonctions polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et en particulier de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique de } f \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} (2x - x^2 - y^2)e^{-x} = 0 \\ 2ye^{-x} = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x(2 - x) = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad (x,y) \in \{(0,0), (2,0)\}.
\end{aligned}$$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, on peut étudier la nature de ces points critiques à l'aide de la matrice hessienne de f en ces points. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 - 4x + x^2 + y^2)e^{-x} & -2ye^{-x} \\ -2ye^{-x} & 2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est diagonale, possède une unique valeur propre 2 qui est strictement positive, donc f admet un minimum local strict en $(0, 0)$. De plus,

$$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

possède deux valeurs propres $-2e^{-2}$ et $2e^{-2}$ dont l'une est strictement positive, et l'autre strictement négative. Ainsi, f n'admet pas d'extremum local en $(2, 0)$, il s'agit d'un point col.

2. (a) On remarque que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_2 \leq 3\}$ est la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 3 pour la norme euclidienne. Ainsi, $\mathcal{D}$ est l'intersection entre le demi plan à droite de l'axe des ordonnées et cette boule.

   (b) Comme $\mathcal{D} = \overline{B}_{\|\ \|_2}((0, 0), 3) \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ (en effet, le cours entraîne qu'une boule fermée est un fermé, et $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant que produit cartésien de deux fermés de $\mathbb{R}$). De plus, $\mathcal{D} \subset \overline{B}_{\|\ \|_2}((0, 0), 3)$ donc $\mathcal{D}$ est borné. Comme $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que $\mathcal{D}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. La fonction f est continue sur le compact non vide $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc par le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum et un maximum global sur $\mathcal{D}$.

(c) On a vu que f admettait un minimum local en $(0,0)$. De plus, $f(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x} > 0 = f(0,0).$$

Ainsi, f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ en $(0,0) \in \mathcal{D}$, donc le minimum global de f sur $\mathcal{D}$ vaut 0 et il est atteint uniquement en $(0,0)$. Le maximum global de f sur $\mathcal{D}$ est atteint, soit en un point de l'intérieur de $\mathcal{D}$, qui est un **ouvert**, auquel cas il s'agit nécessairement d'un point critique de f, soit en un point de la frontière de $\mathcal{D}$, notée $\mathcal{F}$. Comme les deux seuls points critiques de f sont $(0,0)$, qui n'est pas un point de maximum de $f_{|\mathcal{D}}$ car $f(0,1) = 1 > f(0,0)$ et $(0,1) \in \mathcal{D}$, et $(2,0)$ en lequel f n'admet pas d'extremum local, le maximum global de $f_{|\mathcal{D}}$ est atteint en un point de $\mathcal{F}$. On peut décomposer $\mathcal{F}$ comme suit :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \text{ où } \mathcal{F}_1 = \{(0,y) \mid y \in [-3;3]\} \text{ et } \mathcal{F}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 3\}.$$

La restriction de f à $\mathcal{F}_1$ s'identifie avec la fonction d'une variable réelle

$$F_1 : y \in [-3;3] \longmapsto y^2$$

qui atteint sa valeur maximale égale à 9 en 3 et -3. La restriction de f à $\mathcal{F}_2$ s'identifie avec la fonction d'une variable réelle

$$F_2 : x \in [0;3] \longmapsto 3e^{-x}$$

qui est décroissante, donc atteint sa valeur maximale en 0, et celle-ci vaut $3e^0 = 3 < 9$. Ainsi, le maximum global de $f_{|\mathcal{D}}$ est égal à 9 et celui-ci est atteint aux deux points $(0,-3)$ et $(0,3)$.

3. On peut utiliser ce que l'on a fait ci-dessus : sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, si f admet un maximum global, c'est nécessairement en l'un de ses deux points critiques, donc en $(0,0)$ puisque $(2,0)$ est un point col, et celui-ci n'est pas un maximum global de f puisque $f(0,1) > f(0,0)$ par exemple. On peut aussi remarquer que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(0,y) = y^2 \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc il est impossible que f admette un maximum global sur $\mathbb{R}^2$.