Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019

Algèbre III

Examen Terminal - Session 2

Exercice 1. Vrai ou faux (Justifiez)

1. Si A est une matrice diagonalisable alors A^2 est diagonalisable.
2. La somme de deux matrices diagonalisables est toujours diagonalisable.
3. Toute matrice diagonalisable est inversible.
4. Toute matrice réelle admet au moins une valeur propre réelle.
5. Les espaces propres d'un endomorphisme u sont stables par u.
6. Soit A une matrice à coefficients entiers. On la suppose inversible dans $M_n(\mathbb{R})$. Alors son déterminant est ± 1.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. On considère la matrice suivante dans $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I$. En déduire le polynôme minimal de A. Montrer que A est diagonalisable.
2. Calculer la trace de A et en déduire le polynôme caractéristique de A.
3. Déterminer les sous-espaces propres de A.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E <u>de rang 1</u>. Soit A la matrice de f dans une base quelconque fixée de E

1. Quelle est la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 ?
2. On note λ la trace de A. Montrer que λ est valeur propre de f.
3. Montrer que le polynôme caractéristique de f est $P(X) = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda)$.
4. Montrer que le polynôme minimal de f est $X(X - \lambda)$.
5. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si la trace de A est non nulle.
6. Soit v un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que v est un vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ.
7. Déterminer (sans autre calcul que celui de leur trace) les valeurs propres et les dimensions des espaces propres correspondants des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$