Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018

Algèbre III

Examen Terminal - Session 2

Exercice 1. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, on rappelle que A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = B$.

Le but de l'exercice va être d'étudier le lien entre le fait que A et B aient à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal et le fait qu'elles soient semblables.

Dans la suite, on notera P_M le polynôme caractéristique et μ_M le polynôme minimal d'une matrice donnée M.

1. On se donne $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 1$ entier. On suppose que A et B sont semblables.
   (a) Montrer que $P_A = P_B$.
   (b) Soit $Q(X) = c_0 + c_1 X + \cdots + c_d X^d \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme quelconque. Soit $P \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer que $Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P$.
   (c) Déduire de la question précédente que μ_B divise μ_A. Conclure que $\mu_A = \mu_B$.
2. Réciproque en dimension 2 : on se donne deux matrices $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. On suppose que $P_A = P_B$ et $\mu_A = \mu_B$.
   (a) Dans le cas où μ_A est de la forme $\mu_A = X - \lambda$ ou bien $\mu_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, justifier que A et B sont diagonalisables et conclure qu'elles sont semblables.
   (b) Ici on suppose que μ_A est de la forme $\mu_A = (X - \lambda)^2$ et on admet le résultat suivant : toute matrice de $M_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice de nilpotence egal à 2 est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant ce résultat à $U = A - \lambda \mathrm{I}$ (bien entendu, on justifiera pourquoi on peut l'appliquer), montrer que A et B sont toutes les deux semblables à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soit A la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, donner la définition de la décomposition de Dunford de M.
2. Calculer la décomposition de Dunford de A.
3. Calculer A^r pour tout entier $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système suivant

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que le système précédent soit équivalent à l'égalité $AX_n = X_{n+1}$. En déduire une expression pour X_n en fonction de A et X_0.
2. Trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
3. En déduire le terme général des suites u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.