Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018

Algèbre III

Examen Terminal - Session 1

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et n un entier, $n \geq 3$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Calculer le déterminant de A.
2. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle inversible ?
3. Déterminer le rang de A en fonction de α.

Exercice 2. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Rappeler la définition du polynôme minimal de A.
3. Déterminer le polynôme minimal de A suivant les valeurs de a, b, c.

Exercice 3. Soient $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2 à coefficients réels. On définit l'endomorphisme $u : E \to E$ en posant $u(A) = {}^tA$.
On note $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On notera $\mathcal{B}$ la base (M_1, M_2, M_3, M_4).

1. Déterminer la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de u.
3. Déterminer une base de chaque sous-espace propre.
4. Justifier que u est diagonalisable.

Exercice 4. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice dont les valeurs propres sont $1, -2$ et 3.

(I) (a) Donner le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Calculer les matrices Π_{-2}, Π_1 et Π_3 des projecteurs spectraux de A sous forme de polynômes en A.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer A^n comme une combinaison linéaire de A^2, A et I_3.

(II) (a) Rappeler la définition de l'exponentielle de A.

(b) Exprimer $\exp(A)$ comme une combinaison linéaire de Π_{-2}, Π_1 et Π_3.

(III) On considère le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) & = 8x(t) + 5z(t) \\ y'(t) & = y(t) \\ z'(t) & = -10x(t) - 7z(t) \end{cases}$$

Trouver la solution $(x(t), y(t), z(t))$ à ce système vérifiant la condition intiale $x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 1$.

Indication : on pourra remarquer que ce système s'écrit $X'(t) = CX(t)$ *où* $\operatorname{Sp} C = \{1, -2, 3\}$.