Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Math III Analyse 2009-2010

Contrôle Continu Ecrit Final - Math III Analyse
20 Janvier 2010

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

Questions de cours (20 minutes)(6 points + 1 point bonus)

1. (5 min) (1 point) Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions.

2. (5 min) (2 points) Démontrer que toute série normalement convergente est uniformément convergente

3. (5 min) (1 point) Enoncer, **sans le démontrer**, le théorème de Dirichlet-Jordan

4. (5 min) (2 points) Enoncer, **sans le démontrer**, le théorème de Parseval-Bessel

5. (BONUS) (+1 point) Démontrer l'inégalité de Bessel

Exercice 1. (40 minutes)(6 points)

Soit la fonction f **paire**, 2π**-périodique** définie pour tout $x \in [0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. (5 min) (1 point) Faire un rapide dessin de la fonction.
2. (5 min) (1 point) Est-ce que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier ?
3. (20 min) (2 points) Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle puis en déduire sa série de Fourier en formulation complexe.
4. (10 min) (2 points) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Indication : pour la dernière somme, on pourra utiliser l'égalité de Parseval.

5. (BONUS) (+1 point) En remarquant que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2. (30 minutes)(4 points)

1. (25 min) (3 points) Montrer que l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$$

admet une unique solution développable en série entière.

2. (5 min) (1 point) Quel est le rayon de convergence de cette série ?

Exercice 3. (30 minutes)(4 points + 1 point bonus)

1. (10 min) (2 points) Quel est le rayon de convergence des séries entières suivantes de la forme $\sum a_n z^n$ pour

a. $a_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}+5}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

b. $a_n = \dfrac{n^3}{3^n}$, où $n \in \mathbb{N}$.

2. (20 min) (2 points) Soit $(f_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

a. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

b. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné $[a, b]$.

c. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a, +\infty[$.

d. (BONUS) (+1 point) Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

correction examen math III analyse - 20 janvier 2010

Question de cours:

1. Soit $\sum f_n$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur D si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\sup_{z \in D} |f_n(z)| < +\infty$ et $\sum \sup_{z \in D} |f_n(z)|$ converge.

2. Si $\sum f_n$ est normalement convergente, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \sup |f_k(z)|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc de Cauchy.

C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. si $m > n \geq N_\varepsilon$ alors

$$\left| \sum_{k=0}^{m} \sup_{z \in D} |f_k(z)| - \sum_{k=0}^{n} \sup_{z \in D} |f_k(z)| \right| \leq \varepsilon$$

soit encore $\left| \sum_{k=n+1}^{m} \sup_{z \in D} |f_k(z)| \right| \leq \varepsilon$.

Or pour tout $z \in D$
$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sup |f_k(z)|$$
$$= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \sup_{z \in D} |f_k(z)| \right| \leq \varepsilon$$

Donc $\sup_{z \in D} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(z) \right| \leq \varepsilon$.

Par conséquent $\sum f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur D.

Donc elle converge uniformément sur D.

3. Soit f une fonction 2π-périodique continue sur $[-\pi, \pi]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. On suppose qu'en ces points de discontinuité, f admet une limite à droite et une limite à gauche FINIES.

Enfin, on suppose que f admet en tout point de $[-\pi, \pi]$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche FINIES.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier de f est convergente en x et a pour somme $\frac{1}{2}\left(\lim_{y \to x^+} f(y) + \lim_{y \to x^-} f(y)\right)$. En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de sa série de Fourier est $f(x)$.

4. Soit $f \in \mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et dont le carré est intégrable sur $[-\pi, \pi]\}$

soit $\{c_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ses coefficients de Fourier en écriture complexe et soit $\{(a_n, b_n), n \in \mathbb{N}\}$ ses coef. de Fourier en écriture réelle. Alors la norme de f vérifie :

1. Inégalité de Bessel, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\|f\|^2 = (f,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\bar{f}(x)\,dx \geq \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

2. Égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = (f,f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

5. Calculons $I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right|^2 dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right)\left(\bar{f}(x) - \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k e^{-ikx}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx}_{\to c_k}$$

$$- \sum_{k=-n}^{n} c_k \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(x)e^{ikx}dx}_{\bar{c}_k} + \sum_{k=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n} c_k \bar{c}_\ell \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)x}dx}_{=\begin{cases}0 & \text{si } k \neq \ell \\ 2\pi & \text{si } k = \ell\end{cases}}$$

donc $I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx - \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2$

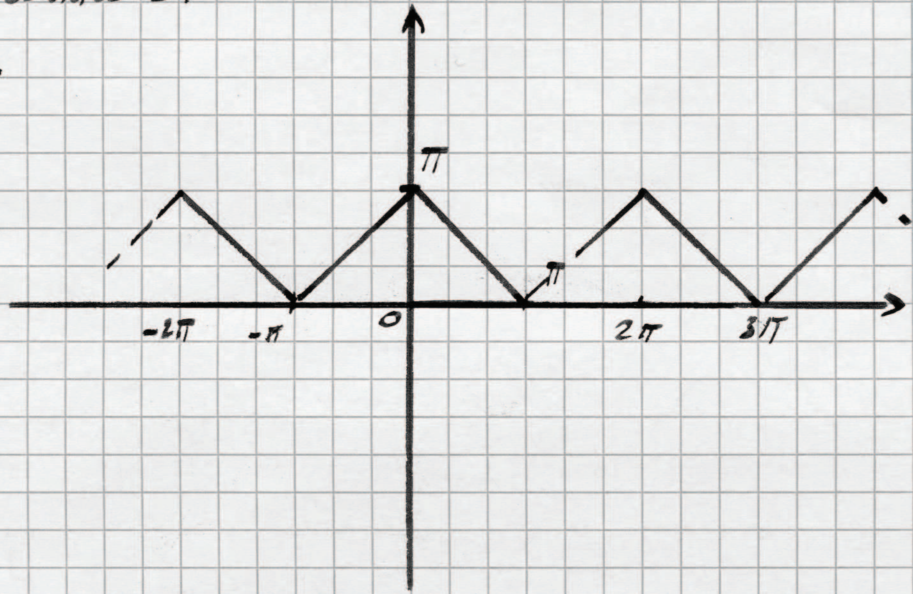
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx - \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2$$

or par définition $I_n \geq 0$, donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx \geq \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 .$$

Exercice 1.

1.



2. f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une dérivée à droite et à gauche partout sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est égale à la somme de sa série de Fourier.

3. Étant donné que f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculons donc a_0, et a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme f est paire $a_0 = 2 . \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi}{2}$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)dx$

$= \underbrace{2\int_0^{\pi}\cos(nx)dx}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx = \frac{-2}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right]$

$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(1) - (-1)^n\right]$

donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p} = 0$ et $a_{2p-1} = \frac{4}{\pi(2p-1)^2}$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos((2p-1)x)}{(2p-1)^2}$

En formulation complexe: $\begin{cases} c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \\ c_0 = a_0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} c_{2p-1} = \dfrac{a_{2p-1}}{2} = \dfrac{2}{\pi(2p-1)^2}, \text{ pour} \\ c_0 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

4. Comme $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos((2p-1)x)}{(2p-1)^2}$

- En prenant $x=0$ on obtient : $f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^2}$

soit encore $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\underline{\underline{\sum_{p=0}^{+\infty}}}\frac{1}{(2p+1)^2} \Rightarrow \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

- Grâce à l'égalité de Parseval :

$\|f\|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$

Or : $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$

et $|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(2p-1)^2}\right)^2$

On a donc l'égalité :

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$$

Ainsi $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{8}\cdot\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right)$

$= \frac{\pi^4}{96}$

D'autre part : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^2}$

Remarque : on peut les séparer, car pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{p}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{p}\frac{1}{(2p-1)^2}$
et chaque terme converge.

Si on note $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ on a $S = \frac{1}{4}S + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^2}$

Donc $S\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}$ donc $S = \frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 2.

1. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

alors $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

f est solution de l'éq. diff. si et seulement si

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 1 = 0$$

ou encore:

$$-1 + 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left[n(n-1)a_n + 4n a_n + 2a_n\right]x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

soit:

$$-1 + 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left[(n^2+3n+2)a_n - a_{n-2}\right]x^n = 0$$

On en déduit que

$-1 + 2a_0 = 0$ càd $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$ et pour tout $n \geq 2$

$(n^2 + 3n + 2)\, a_n = a_{n-2}$

soit encore $(n+1)(n+2)\, a_n = a_{n-2}$ (*) $a_1 = 0$ et (*) montrent que

$a_{2m+1} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 2m$ $\quad (2m+1)(2m+2)\, a_{2m} = a_{2m-2}$

$\quad (2m-1)\, 2m \quad a_{2m-2} = a_{2m-4}$

$\vdots$

$3.4\, a_2 = a_0 = \frac{1}{2}$ d'où $2.3.4\, a_2 = 1$

Par conséquent $2.3. \ldots (2m+1)(2m+2)\, a_{2m} = 1$

càd que $a_{2m} = \frac{1}{(2m+2)!}$

et $f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m+2)!}$

2. Calculons le rayon de convergence: on pose $u_m(x) = \frac{x^{2m}}{(2m+2)!}$

$$\left|\frac{u_{m+1}(x)}{u_m(x)}\right| = \frac{(2m+2)!}{(2m+4)!}\, x^2 = \frac{1}{(2m+4)(2m+3)}\, x^2 \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0 < 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Donc le rayon de convergence est infini.

Exercice 3

1.a) $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}+5}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \frac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{n+1}+5}$. Quand $n \to +\infty$ $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln n(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \to 1$

et $\frac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{n+1}+5} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \sim 1$ quand $n \to +\infty$) donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$

Donc $R = 1$

b) $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} \to 3$ quand $n \to +\infty$

Donc $R = 1/3$

2. a. $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x^2} \sim \frac{ne^{-x}}{n} = e^{-x}$ quand $n \to +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto f(x) = e^{-x}$

b. pour tout $n \geq 1$ $f_n(x) - f(x) = \frac{ne^{-x}+x^2-(n+x^2)e^{-x}}{n+x^2} = \frac{x^2-x^2e^{-x}}{n+x^2}$

d'où $\sup_{a\leq x\leq b} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{a\leq x\leq b} \frac{x^2+x^2e^{-x}}{n+x^2} \leq \frac{d^2+d^2e^{-c}}{n^2+c^2}$

où $c = \min(|a|, |b|)$ et $d = \max(|a|, |b|)$.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

c. Soit $n \geq 1$ fixé. $f_n(x) - f(x) = \frac{1}{n^2+x^2} x^2(1-e^{-x})$

On a $\lim_{x\to+\infty} (f_n(x) - f(x)) = 1$. Donc il existe $x_0 \geq a$ tel que si $x \geq x_0$ alors $f_n(x) - f(x) \geq \frac{1}{2}$. Par suite, pour tout $n \geq 1$

$\sup_{x\geq a} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{x\geq x_0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq x_0} (f_n(x) - f(x)) \geq \frac{1}{2}$

Par conséquent, on ne peut pas avoir $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[a, +\infty[$ vers f.

d. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-1}$

correction examen math III analyse - 20 janvier 2010

Question de cours:

1. Soit $\sum f_n$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur D si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\sup_{z \in D} |f_n(z)| < +\infty$ et $\sum \sup_{z \in D} |f_n(z)|$ converge.

2. Si $\sum f_n$ est normalement convergente, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \sup |f_k(z)|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc de Cauchy.

C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. si $m > n \geq N_\varepsilon$ alors

$$\left| \sum_{k=0}^{m} \sup_{z \in D} |f_k(z)| - \sum_{k=0}^{n} \sup_{z \in D} |f_k(z)| \right| \leq \varepsilon$$

soit encore $\left| \sum_{k=n+1}^{m} \sup_{z \in D} |f_k(z)| \right| \leq \varepsilon$.

Or pour tout $z \in D$ $\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sup |f_k(z)|$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \sup_{z \in D} |f_k(z)| \right| \leq \varepsilon$$

Donc $\sup_{z \in D} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(z) \right| \leq \varepsilon$.

Par conséquent $\sum f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur D.

Donc elle converge uniformément sur D.

3. Soit f une fonction 2π-périodique continue sur $[-\pi, \pi]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. On suppose qu'en ces points de discontinuité, f admet une limite à droite et une limite à gauche FINIES.

Enfin, on suppose que f admet en tout point de $[-\pi, \pi]$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche FINIES.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier de f est convergente en x et a pour somme $\frac{1}{2}\left(\lim_{y \to x^+} f(y) + \lim_{y \to x^-} f(y) \right)$. En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de sa série de Fourier est $f(x)$.

4. Soit $f \in \mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et dont le carré est intégrable sur $[-\pi, \pi] \}$

soit $\{c_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ses coefficients de Fourier en écriture complexe et soit $\{(a_n, b_n), n \in \mathbb{N}\}$ ses coef. de Fourier en écriture réelle. Alors la norme de f vérifie :

1. Inégalité de Bessel, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\|f\|^2 = (f, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{f}(x)\, dx \geq \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

2. Égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = (f, f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

5. Calculons $I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}|^2 dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\Big)\Big(\bar{f}(x) - \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k e^{-ikx}\Big) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx}_{\to c_k}$$

$$- \sum_{k=-n}^{n} c_k \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) e^{-ikx} dx}_{\bar{c}_k} + \sum_{k=-n}^{n} \sum_{\ell=-n}^{n} c_k \bar{c}_k \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)x} dx}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ 2\pi & \text{si } k = \ell \end{cases}}$$

donc $I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$

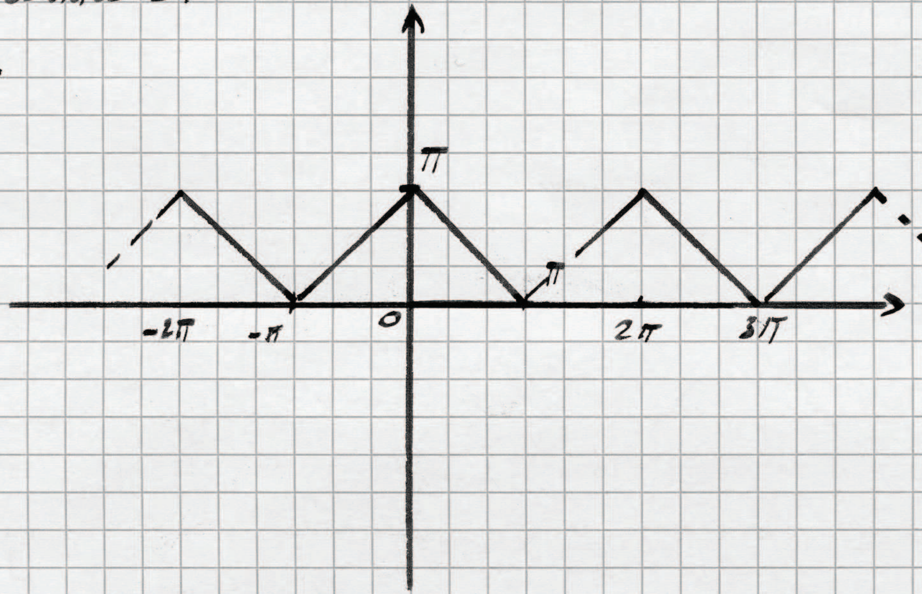
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

or par définition $I_n \geq 0$, donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dk \geq \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 .$$

Exercice 1.

1.



2. f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une dérivée à droite et à gauche partout sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est égale à la somme de sa série de Fourier.

3. Etant donné que f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculons donc a_0, et a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme f est paire $a_0 = 2.\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi}{2}$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)dx$

$= \underbrace{2\int_0^{\pi}\cos(nx)dx}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{-2}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right]$

$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(1) - (-1)^n\right]$

donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p} = 0$ et $a_{2p-1} = \frac{4}{\pi(2p-1)^2}$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos((2p-1)x)}{(2p-1)^2}$

En formulation complexe: $\begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_0 = a_0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} c_{2p-1} = \frac{a_{2p-1}}{2} = \frac{2}{\pi(2p-1)^2}, \text{pour} \\ c_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

4. Comme $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos((2p-1)x)}{(2p-1)^2}$

- En prenant $x = 0$ on obtient : $f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^2}$

soit encore $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \Rightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

- Grâce à l'égalité de Parseval :

$\| f \|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$

Or : $\| f \|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$

et $|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi (2p-1)^2} \right)^2$

On a donc l'égalité :

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

Ainsi $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{8} \cdot \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} \right)$

$= \frac{\pi^4}{96}$

D'autre part : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^2}$

Remarque : on peut les séparer, car pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{n=1}^{2p} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{p} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{p} \frac{1}{(2p-1)^2}$

et chaque terme converge.

Si on note $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ on a $S = \frac{1}{4} S + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^2}$

Donc $S\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}$ donc $S = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 2.

1. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

alors $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

f est solution de l'éq. diff. si et seulement si

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - 1 = 0$$

ou encore:

$$-1 + 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[n(n-1)a_n + 4n a_n + 2a_n \right] x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

soit:

$$-1 + 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[(n^2+3n+2) a_n - a_{n-2} \right] x^n = 0$$

On en déduit que

$-1 + 2a_0 = 0$ càd $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$ et pour tout $n \geq 2$

$(n^2+3n+2)\, a_n = a_{n-2}$

soit encore $(n+1)(n+2)\, a_n = a_{n-2}$ (*) $a_1 = 0$ et (*) montrent que

$a_{2m+1} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 2m$ $\quad (2m+1)(2m+2)\, a_{2m} = a_{2m-2}$

$(2m-1)\, 2m \quad a_{2m-2} = a_{2m-4}$

$\vdots$

$3.4\, a_2 = a_0 = \frac{1}{2}$ d'où $2.3.4\, a_2 = 1$

Par conséquent $2.3. \dots (2m+1)(2m+2)\, a_{2m} = 1$

càd que $a_{2m} = \dfrac{1}{(2m+2)!}$

et $f(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m+2)!}$

2. Calculons le rayon de convergence: on pose $u_m(x) = \dfrac{x^{2m}}{(2m+2)!}$

$$\left| \frac{u_{m+1}(x)}{u_m(x)} \right| = \frac{(2m+2)!}{(2m+4)!}\, x^2 = \frac{1}{(2m+4)(2m+3)}\, x^2 \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0 < 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Donc le rayon de convergence est infini.

Exercice 3

1.a) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}+5}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \dfrac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{n+1}+5}$. Quand $n \to +\infty$ $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln n(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \to 1$

et $\dfrac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{n+1}+5} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \sim 1$ quand $n \to +\infty$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$

Donc $R = 1$

b) $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \dfrac{3^{n+1}}{3^n} = 3 \cdot \dfrac{(n+1)^3}{n^3} \to 3$ quand $n \to +\infty$

Donc $R = 1/3$

2. a. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x^2} \sim \dfrac{ne^{-x}}{n} = e^{-x}$ quand $n \to +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto f(x) = e^{-x}$

b. pour tout $n \geq 1$ $f_n(x) - f(x) = \dfrac{ne^{-x}+x^2-(n+x^2)e^{-x}}{n+x^2} = \dfrac{x^2-x^2e^{-x}}{n+x^2}$

d'où $\sup\limits_{a\leq x\leq b} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{a\leq x\leq b} \dfrac{x^2+x^2e^{-x}}{n+x^2} \leq \dfrac{d^2+d^2e^{-c}}{n^2+c^2}$

où $c = \min(|a|,|b|)$ et $d = \max(|a|,|b|)$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

c. Soit $n \geq 1$ fixé. $f_n(x) - f(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2} x^2(1-e^{-x})$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - f(x)) = 1$. Donc il existe $x_0 \geq a$ tel que si $x \geq x_0$ alors $f_n(x) - f(x) \geq \frac{1}{2}$. Par suite, pour tout $n \geq 1$

$\sup\limits_{x\geq a} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup\limits_{x\geq x_0} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\geq x_0} (f_n(x) - f(x)) \geq \frac{1}{2}$

Par conséquent, on ne peut pas avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[a,+\infty[$ vers f.

d. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1-e^{-1}$