

Contrôle Continu Ecrit Terminal- Math III Analyse
14 janvier 2009

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

Questions de cours (30 minutes)(6 points)

1. (4 points) Enoncer et démontrer le théorème d'Abel sur une série entière $\sum a_n z^n$ où pour tout $z \in \mathcal{C}$, $a_n \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. (2 points) Montrer que si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement.

Exercice 1. (60 minutes)(8 points)

1. (20 min) (4 points) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{2^{nx}}$.
 - a. Calculer $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x > 0$.
 - b. Montrer que la série $\sum u'_n(t)$ converge normalement sur un intervalle $[a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $0 < a < x < b$ pour $x > 0$.
 - c. Calculer alors la somme de cette série pour $x > 0$.
2. (20 min)(2 points) Trouver le rayon de convergence R des séries entières $\sum a_n z^n$ suivantes
 - a. $a_n = \frac{n^3}{3^n}$, $n \geq 0$.
 - b. $a_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}$, $n \geq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Indication : on pourra d'abord regarder le cas où $|z| < 1$, puis raisonner par l'absurde en utilisant la série dérivée.
3. (20 min) (2 points) On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad xy'' + 3y' - 4x^3y = 0,$$

où $\omega \in \mathbb{R}$.

- a. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) , développable en série entière autour de 0 et telle que $f(0) = 1$.
- b. Exprimer f à l'aide des fonctions élémentaires.

Exercice 2. (30 minutes)(6 points + 2 points bonus)

On considère la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|(\pi - |x|)$, si $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Dessiner la fonction sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ? Justifier.
3. Déterminer la série de Fourier de f en formulation réelle.

BONUS : déterminer la série de Fourier de f en formulation complexe.

4. En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

BONUS : calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

6 Question de cours:

1. Théorème d'Abel: soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ t.q. la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée, alors

- (2)
- i) $\forall z \in \mathbb{C}$ t.q. $|z| < |z_0|$, la série complexe $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
 - ii) $\forall r$ t.q. $0 \leq r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque fermé $D(0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \text{ t.q. } |z| \leq r\}$.

Preuve: . Si $z_0 = 0$, il n'existe pas de $z \in \mathbb{C}$ t.q. $|z| < |z_0|$ et il n'existe pas $r \in \mathbb{R}$ t.q. $r < |z_0|$, donc la propriété est triviale.

Si $z_0 \neq 0$, soit M t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leq M$

- (2)
- i) Si $z \in \mathbb{C}$ est t.q. $|z| < |z_0|$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leq M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$.
Comme $\left|\frac{z}{z_0}\right| = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$, $\sum M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ converge donc $\sum |a_n z^n|$ converge.

ii) Si $0 \leq r < |z_0|$, $\sup_{z \in D(0, r)} |a_n z^n| \leq \sup_{z \in D(0, r)} M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n = M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$
et $\sum M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ converge.

2. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ cv abs. alors la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

(2) Preuve $\sup_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$. Or, si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ cv abs. alors $\sum (|a_n| + |b_n|)$ cv et donc $\sum \sup_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|$ cv.

8

Exercice 1.

1. a. Soit $x > 0$ on a $u_n(x) = \left(\frac{1}{2^x}\right)^n$, comme $x > 0$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est une série géométrique convergente de somme $S(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^x}} - 1 = \frac{2^x}{2^x - 1} - 1 = \frac{1}{2^x - 1}$

(1.5)

b. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ $u'_n(x) = \frac{d}{dx} \left(e^{-n x \ln 2} \right) = -\frac{n \ln 2}{2^{nx}}$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 |u'_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \ln 2}{2^{nx}} = 0$, on en déduit alors la convergence absolue de $\sum_{n=2}^{\infty} u'_n(x)$

Montrons ensuite $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $S'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u'_n(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < a < x < b$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ converge simplement sur $[a, b]$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(t)$ converge uniformément sur $[a, b]$: en effet elle y converge normalement puisque $\forall t \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u'_n(t)| = \frac{n \ln 2}{2^{nt}} \leq \frac{n \ln 2}{2^{na}}$ et nous avons montré que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \ln 2}{2^{na}}$ converge.

On a donc $S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(t) \quad \forall t \in [a, b]$

Donc en particulier $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n \ln 2}{2^{nx}}$

Par ailleurs, pour $x > 0$

$$S'(x) = \frac{(2^x - 1) 2^x \ln 2 - 2^x 2^{x \ln 2}}{(2^x - 1)^2} = \frac{-2^x \ln 2}{(2^x - 1)^2}$$

① c. d'où $\sum_{n=2}^{+\infty} u'_n(x) = -\frac{2^x \ln 2}{(2^x - 1)^2}$

2. a. Rayon de cs de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{n^3}{3^n}$ $n \geq 0$

$$\textcircled{1} \quad \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^n} |z| = 3|z| \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} \rightarrow 3|z| \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Donc la série cs absolument (resp. diverge) si $|z| < 3$ (resp. $|z| > 3$). Donc $R = 3$.

b. $a_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}$, $n \geq 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$

• Si $|z| < 1$ $|a_n z^n| = \frac{|\cos(n\theta)|}{n} |z|^n \leq \frac{|z|^n}{n}$

le rayon de convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n}$ est égal à 1 (vérification immédiate) donc $\sum |a_n z^n|$ est convergente et par conséquent $R \geq 1$

Supposons que $R > 1$: la série dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta) z^{n-1}$ a même rayon de convergence R . Elle converge absolument $\forall z \in \mathbb{C}$.

$|z| < R$ et en particulier pour $z = 1$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\theta)$ serait convergent. Autrement dit $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\theta) = 0$

et donc aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos((n+1)\theta) = 0$

$$\text{or } \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

on a alors : $\sin \theta = 0$ et alors $\theta \in \pi \mathbb{Z}$, donc $|\cos(n\theta)| = 1$ et

l'on ne peut alors avoir $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\theta) = 0$

• $\sin \theta \neq 0$ mais alors $\cos((n+1)\theta) \rightarrow 0$ et $\cos(n\theta) \rightarrow 0$

montre que nécessairement $\sin(n\theta) \rightarrow 0$

ce qui est incompatible avec $\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1$

Par conséquent on ne peut avoir $R > 1$, et comme $R \geq 1$, on a $R = 1$

3. a. $xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$

On cherche f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $x \in]-R, R[$ où $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

On a nécessairement

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+3} = 0$$

ce qui s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 4 \sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3} x^n = 0$$

① ou encore:

$$3a_1 + (2a_2 + 6a_2)x + (6a_3 + 9a_3)x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} [(n+1)(n+3)a_{n+1} - 4a_{n-3}]x^n = 0$$

d'où $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (*)

et $(n+1)(n+3)a_{n+1} - 4a_{n-3} = 0 \quad \forall n \geq 3$

écrivons cette dernière relation sous la forme $n(n+2)a_n = 4a_{n-4} \quad \forall n \geq 4$

$f(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$

D'après (*) et la relation de récurrence on a $a_{4m+1} = a_{4m+2} = a_{4m+3} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

De plus, $\forall m \in \mathbb{N}^* \quad 4m(4m+2)a_{4m} = 4a_{4m-4}$

càd

$$a_{4m} = \frac{1}{2m(2m+1)} a_{4m-4}$$

$$a_{4m-4} = \frac{1}{(2m-2)(2m-1)} a_{4m-8}$$

$\vdots$

$$a_4 = \frac{1}{2 \cdot 3} a_0 = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

d'où $a_{4m} = \frac{1}{(2m+1)!}$

Nécessairement $f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{4m}}{(2m+1)!}$. La solution si elle existe est unique. La fonction

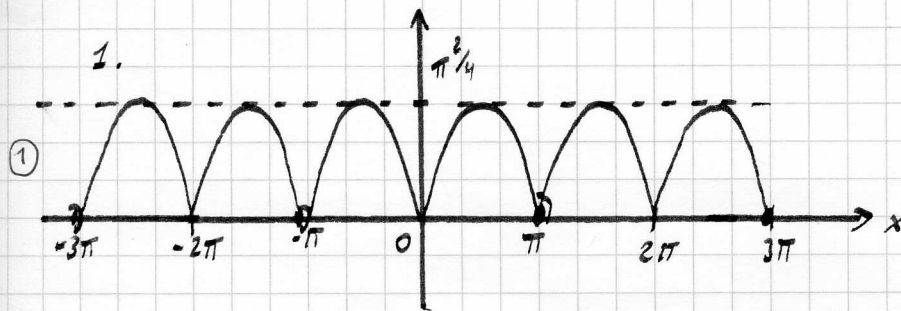
f ainsi définie sera solution si nous montrons que le rayon de cv^s de la série entière est $\neq 0$.

Prenons $u_n(x) = \frac{x^{4n}}{(2n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. On a $\left| \frac{u_{m+1}(x)}{u_m(x)} \right| = \frac{x^4}{(2m+3)(2m+2)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$

donc $R = +\infty$

② b. $f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{4m+2}}{(2m+1)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(x^{2m+2})^2}{(2m+1)!} = \frac{\sinh(x^2)}{x^2}$

Exercice 2.



2. f est continue sur $\mathbb{R}$ ($f(\pi) = f(-\pi)$) et f est continue sur $[-\pi, \pi]$

① D'autre part f possède en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite. Donc f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.

3. f est pair donc $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Si $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|(\pi - |t|) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi t - t^2) \cos(nt) dt$

② donc $a_0 = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\pi t^2}{2} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{3}$ ou $\frac{\pi^2}{6}$ si on considère a_0 dans le développement de Fourier au lieu de $a_0/2$

et si $n \geq 1$ $a_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[(\pi t - t^2) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\pi - 2t) \frac{\sin(nt)}{n} dt \right\}$

$= -\frac{2}{\pi n} \left\{ \left[-(\pi - 2t) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \frac{\cos(nt)}{n} dt \right\} = -\frac{2}{\pi n} \frac{\pi(-1)^n + 11}{n}$

Si n est impair $a_n = 0$

si n " pair $a_{2m} = -\frac{1}{\pi m} \frac{2\pi}{2m} = -\frac{1}{m^2} \quad (n = 2m)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = S(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(2mx)}{m^2}$

d'après 2)

Bonus: $\forall m \in \mathbb{N} \quad c_{2m+1} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$

④ $c_{2m} = c_{-2m} = \frac{a_{2m}}{2} = -\frac{1}{2m^2} \quad \text{et } c_0 = \frac{\pi^2}{6}$

4. Appliquons la formule de Parseval:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 (\pi - |x|)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 (\pi - x)^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 x^2 - 2\pi x^3 + x^4) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 \frac{\pi^3}{3} - 2\pi \frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^5}{5} \right) \\ &= \frac{\pi^4}{3} - \frac{\pi^4}{2} + \frac{\pi^4}{5} = \frac{10\pi^4 - 15\pi^4 + 6\pi^4}{30} = \frac{\pi^4}{30} \end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{30} - \frac{\pi^4}{36} = \frac{6\pi^4 - 5\pi^4}{180} = \frac{\pi^4}{180}$

par conséquent $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Bonus: on a vu dans 3) que $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(2mx)}{m^2}$

(+1) si $x=0$ $0 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$ d'où $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$