Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE: Math III Analyse 2007-2008

Contrôle Terminal Ecrit - Math III Analyse
2ème Session - 24 Janvier 2008

Avant propos.

La durée de l'examen est de 1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif.

Questions de cours (20 minutes)

1. (3 points) Enoncer et démontrer le théorème d'Abel pour une série entière $\sum a_n z^n$.

2. (3 points) Donner la définition de la série de Fourier de f, une fonction 2π-périodique (autrement dit, sa forme trigonométrique réelle et complexe, ainsi que ses coefficients (appelés coefficients de Fourier)).

Exercice 1. (30 minutes)

1. (2 points) Etudier la nature (convergente ou divergente) de la série de terme général

$$u_n = \frac{\ln(n)^n}{n!}.$$

2. a. (2 point)Trouver le rayon de convergence R de la série entière de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^n}{1+2+3+...+n}, \quad n \geq 1.$$

Indication: on pensera à écrire la somme $1+2+3+...+n$ sous forme d'un produit connu.

b. (2 point) Calculer sa somme pour $x \in]-R, R[$.
Indication: on rappelle que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 2. (40 minutes)

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}.$$

1. (1 point) Montrer que cette série converge simplement sur $E_s = [0, +\infty[$.
2. (2 points) Montrer que cette série converge absolument sur $E_a =]0, +\infty[$, mais pas sur E_s.
3. (2 points) Soit $S(t)$ la somme de cette série pour tout $t \in E_s$. Montrer que lorsque t tend vers $+\infty$, $S(t)$ tend vers 1.
   Indication: on pourra considérer $|S(t) - 1|$ quand t tend vers $+\infty$.
4. (2 points) Montrer que la série converge uniformément sur E_s.
5. (1 point) Cette série converge-t-elle normalement sur E_s? Et sur E_a?

Exercice BONUS

(+ 2 points) On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments strictement positifs. On ne sait pas si cette suite converge ou diverge à priori. Soit la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{1 + n^2 u_n}$. Quelle est alors la nature (convergente ou divergente) de cette série?

Contrôle terminal écrit - 2ème session 24 janvier 2008 - CORRIGÉ

Question de cours

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ t.q. $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Alors i. $\forall z_1 \in \mathbb{C}$ t.q. $|z_1| < |z_0|$, $\sum a_n z_1^n$ est ABSOLUMENT cv.

ii. $\forall r$ t.q. $0 \leq r < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ est NORMALEMENT cv sur le disque FERMÉ $\bar{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| \leq r\}$.

Preuve : . Si $z_0 = 0$: $\nexists z_1 \in \mathbb{C}$ t.q. $|z_1| < |z_0|$ et $\nexists r \in \mathbb{R}$ t.q. $r < |z_0|$

. Si $z_0 \neq 0$, soit M t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n z_0^n| \leq M$

i. Si $z_1 \in \mathbb{C}$ est t.q. $|z_1| \leq |z_0|$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n z_1^n| = \left|a_n z_0^n \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n\right|$

$$\leq M \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$$

Comme $\left|\frac{z_1}{z_0}\right| = \frac{|z_1|}{|z_0|} < 1$, $\sum M \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$ cv et donc $\sum |a_n z_1^n|$ cv.

ii. Si $0 \leq r < |z_0|$ $\sup_{z \in \bar{D}(0,r)} |a_n z^n| \leq \sup_{x \in \bar{D}(0,r)} M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$

et $\sum M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ converge.

2. Soit f une fonction 2π-périodiques. Sa série de FOURIER est par définition la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ définie par :

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx$

et $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

(si ces intégrales sont définies).

Sous forme complexe : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ où $\forall n \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}$ $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

EXERCICE 1.

1. $u_n = \dfrac{(\ln(n))^n}{n!}$ $\quad n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left[\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right]^n \cdot \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Or d'une part $\left[\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right]^n = \left[\dfrac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)}\right]^n = \left[1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right]^n$

$$= \left\{1+\frac{1}{\ln(n)}\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}^n = \left\{1+\frac{1}{n\ln(n)}+\frac{1}{\ln(n)}o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

Or $\ln\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n\ln(n)}+\dfrac{1}{\ln(n)}o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$

$$\sim n\left[\frac{1}{n\ln(n)}+\frac{1}{\ln(n)}o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{\ln(n)}+\frac{n}{\ln(n)}o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left[\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right]^n = 0$, et en prenant l'exponentielle des 2 membres

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right]^n = 1$

d'autre part $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ et donc la série CONVERGE d'après la règle de d'Alembert.

2. a. $1+2+\dots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Donc $u_n(x) = \dfrac{2x^n}{n(n+1)}$

Donc $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}|x| = \dfrac{n}{n+2}|x| \to |x|$ quand $n \to \infty$

Ainsi $\boxed{R=1}$

b. On a : $\dfrac{2x^n}{n(n+1)} = 2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)x^n = 2\dfrac{x^n}{n} - 2\dfrac{x^n}{n+1}$

Pour $|x|<1$ $\quad \ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ donc $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n} = -2\ln(1-x)$

et $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n} = \dfrac{1}{x}\left[-\ln(1-x)-x\right]$

$$= -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1$$

Finalement $\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n} = -2\ln(1-x) + 2\frac{\ln(1-x)}{2} + 2$

EXERCICE 2.

1. Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n(t) = \frac{1}{n+1}(-1)^n e^{-nt}$

si $t \geq 0$ $\lim_{n\to\infty} |u_n(t)| = 0$

De plus la série de terme général $u_n(t)$ est alternée et $u_{n+1}(t) \leq u_n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $x \to \frac{e^{-xt}}{x+1}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ converge simplement sur E_S.

$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{e^{nt}}{nt} = +\infty\right)$

2. Si $t>0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ $e^{nt} \geq nt$ càd $e^{-nt} \leq \frac{1}{nt}$

alors $|u_n(t)| \leq \frac{1}{tn(n+1)}$ qui est le terme général d'une série cv.

si $t=0$ $\quad |u_n(t)| = |u_n(0)| = \frac{1}{n+1}$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(t)|$ diverge.

3. $\forall t > 0$

$$|S(t)-1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt}}{n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

donc $\lim_{t\to\infty} |S(t)-1| = 0$ et donc $\lim_{t\to\infty} S(t) = 1$.

4. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et cv vers 0.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \geq 0$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-kt}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-e^{-t})^k\right| = \frac{1-(-1)^{n+1} e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}} \leq \frac{2}{1+e^{-t}}$$

Donc $\left|\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-kt}\right| \leq 2$

D'après le critère d'Abel, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ cv u^t sur E_S.

5. La série ne convergeant pas absolument sur E_S, elle ne peut converger normalement sur E_S.

Sur E_a : $t \to \frac{e^{-nt}}{n+1}$ est décroissante sur E_a, on a :

$\sup_{t>0} |u_n(t)| = \sup_{t>0} \frac{e^{-nt}}{n+1} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{e^{-nt}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$: terme g^al^ d'une série DIVERGENTE

Donc la série ne converge pas normalement sur E_a.

EXERCICE BONUS

$$v_n = \frac{u_n}{1+n^2u_n} \leq \frac{u_n}{n^2u_n} = \frac{1}{n^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ Σv_n est alors TOUJOURS convergente.