Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE: Math III Analyse 2007-2008

Contrôle Terminal Ecrit - Math III Analyse
1ère Session - 21 Décembre 2007

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif.

Questions de cours (20 minutes)

1. (3 points) Enoncer et démontrer la propriété de comparaison d'une série et d'une intégrale impropre.
   (On ne s'attachera qu'à comparer la convergence et la divergence, l'encadrement du reste n'est pas demandé).

2. (3 points) Soit $D \subset \mathbb{C}$ et $a \in D$. Enoncer et démontrer la propriété de continuité de la limite uniforme f d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{C}$ et continues en a.

Exercice 1. (30 minutes)

1. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad xy'' + 2y' + \omega^2 xy = 0,$$

   où $\omega \in \mathbb{R}$.

   a. (1 point) Montrer qu'il existe une fonction f développable en série entière autour de 0 (c'est à dire sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$) solution de (E) et vérifiant la condition $f(0) = 1$.
   b. (1 point) Calculer alors son rayon de convergence.
   c. (1 point) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

   N.B.: Pour les question a. et b., il sera conseillé de discuter des cas $\omega = 0$ ou non.

2. (2 points) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$?

Exercice 2. (30 minutes)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |sin(x)|$ si $x \in]-\pi, \pi]$.

1. (0.5 point) Faire un dessin rapide de la fonction.
2. (0.5 points)Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. (2 points) Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle.
   N.B.: On rappelle que $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.
4. (1 point) A l'aide de la formule de Parseval évaluer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 3. (40 minutes)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^\alpha x e^{-nx^2/2} \end{array}$$

1. (1 point) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in N^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.
2. (1 point) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$? On discutera suivant les valeurs de α.
3. (1 point) Montrer que pour tout $h > 0$ $(f_n)_{n\in N^*}$ converge uniformément sur $[h, +\infty[$ vers la fonction nulle.
4. On se place maintenant dans le cas particulier où $\alpha = 1$ et on considère maintenant la série de fonction de terme général f_n.
   a. (1 point) Montrer qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et que sa somme $S : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   b. (1 point) Calculer, pour $x \geq 0$ et $m \in N^*$, $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)$, puis expliciter $S(x)$ pour $x \geq 0$.
   c. (Bonus: 1 point) La fonction S est-elle continue en 0?

Contrôle terminal MATH III - Analyse

. Question de cours

1. énoncé : Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable sur tout intervalle borné dans $[a, +\infty[$ décroissante et positive.

Alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature (convergentes ou divergentes)

Preuve : Comme f est décroissante on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [n-1, n] \quad f(n) \leq f(t) \leq f(n-1)$$

$$\text{donc } \int_{n-1}^{n} f(n)dt \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt \leq \int_{n-1}^{n} f(n-1)dt$$

$$\text{soit} \quad f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt \leq f(n-1).$$

$$\text{Or } \int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{\substack{X \to +\infty \\ X \in \mathbb{N}}} \int_a^X f(t)dt = \lim_{\substack{X \to +\infty \\ X \in \mathbb{N}}} \int_a^{E(a)+1} f(t)dt + \sum_{n=E(a)+2}^{X} \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

Donc, puisque $f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$:

. si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ cv alors $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)dt$ cv et $\sum f(n)$ converge

. si $\sum f(n)$ diverge alors $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)dt$ div donc $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge

De même puisque $\int_{n-1}^{n} f(t)dt \leq f(n-1)$:

. si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge alors $\sum f(n-1)$ div donc $\sum f(n)$ diverge

. si $\sum f(n)$ cv, alors $\sum f(n-1)$ converge donc $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge

2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D. Soit $a \in D$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Preuve : Soit $a \in D$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q pour tout $n \geq N_\varepsilon$, pour tout $x \in D$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$. Il existe $\eta_\varepsilon > 0$ t.q. $(|x-a| \leq \eta_\varepsilon \text{ et } x \in D) \Rightarrow |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| \leq \varepsilon/3$

Donc $(|x-a|\le \eta_\varepsilon \text{ et } x\in D) \Rightarrow |f(x)-f(a)| \le |f(x)-f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x)-f_{N_\varepsilon}(a)|$
$+ |f_{N_\varepsilon}(a)-f(a)|$
$\le \varepsilon$

Donc f est continue en a.

Exercice 1.

1.a. On cherche f sous la forme $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $x\in]-R,R[$

On a alors

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$, ce qui s'écrit

$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\, a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$, soit encore

$2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+1} + \omega^2 a_{n-1}\right] x^n = 0$, ce qui donne

$2a_1 = 0$ ie $a_1 = 0$ et $(n+1)(n+2)a_{n+1} + \omega^2 a_{n-1} = 0 \quad \forall n\ge 1$

et comme $f(0)=1$ alors $a_0=1$. On a alors : pour tout $n\ge 1$

$a_{n+1} = -\frac{\omega^2}{(n+1)(n+2)} a_{n-1}$. Par conséquent : $a_{2m+1}=0 \quad \forall m\in\mathbb{N}$

De plus, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ $\quad a_{2m} = -\frac{\omega^2}{2m(2m+1)} a_{2m-2}$

$a_{2m-2} = -\frac{\omega^2}{(2m-2)(2m-1)} a_{2m-4} \quad \dots \quad a_2 = -\frac{\omega^2}{2.3} a_0 = -\frac{\omega^2}{2.3}$

D'où $a_{2m} = (-1)^m \frac{\omega^{2m}}{(2m+1)!}$. Nécessairement $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\omega^{2m}}{(2m+1)!} x^{2m}$ (*)

b. La solution si elle existe, est unique. La fonction définie par (*) sera solution si nous montrons que le rayon de convergence de la série entière est non nul.

Si $\omega=0$ c'est évident

si $\omega\ne 0$, nous posons $u_m(x) = \frac{(-1)^m \omega^{2m}}{(2m+1)!} x^{2m} \quad \forall m\in\mathbb{N}$

On a $\left|\frac{u_{m+1}(x)}{u_m(x)}\right| = \frac{\omega^2}{(2m+3)(2m+2)} x^2 \to 0$ quand $m\to\infty$ donc $R=+\infty$

c. On reconnaît que si $w \neq 0$ $f(x) = \frac{1}{wx} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{(wx)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{\sin(wx)}{wx}$

2. $u_n = \frac{n!}{n^n}$: terme g^{al} positif.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Quand $n \to \infty$ $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim n\left(-\frac{1}{n+1}\right) = -1$

donc $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$: la série converge d'après la règle de d'Alembert

Exercice 2.

1. À faire

2. f est continue sur $\mathbb{R}$ $(f(\pi) = f(-\pi))$ et f est continue sur $]-\pi, \pi[$)
et f possède en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite
Donc f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.

3. f est paire donc $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on prend également $b_0 = 0$.

Si $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos(nt)\,dt$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(1+n)t + \sin(1-n)t]\,dt$

donc si $n = 1$ $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = 0$

si $n \neq 1$ $a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{\cos((1-n)t)}{1-n}\right]_0^{\pi}\right\}$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\left[1 - (-1)^{n+1}\right] + \frac{1}{1-n}\left[1 - (-1)^{n-1}\right]\right]$

. si n est pair : $n = 2m$ $a_{2m} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2m+1} + \frac{2}{1-2m}\right] = -\frac{4}{\pi(4m^2-1)}$

si n est impair $n = 2m+1$ $a_n = 0$

et $a_0 = \frac{4}{\pi}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = S(x) = \frac{2}{\pi}\left(1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}\right)$

4. D'après la formule de Parseval :

$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(4m^2-1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$$

soit $\frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(4m^2-1)^2} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} (1-\cos(2x))dx = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(4m^2-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$ d'où $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(4m^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$

Exercice 3.

1. Si $x=0$ $f_n(x) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

si $x>0$ $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx^2/2} \to 0$ quand $n \to \infty$.

On a donc la convergence simple sur $[0,+\infty[$ de $(f_n)_n$ vers la fonction nulle.

2. Etudions la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$:

$\forall x \geq 0 \quad f_n'(x) = n^\alpha e^{-nx^2/2} - n^{\alpha+1} x^2 e^{-\frac{nx^2}{2}} = n^\alpha e^{-\frac{nx^2}{2}}(1-nx^2)$

Donc la fonction f_n admet un maximum en $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Il en résulte que $\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x \geq 0} f_n(x) = f_n(x_n) = n^{\alpha - \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}}$

Si $\alpha \geq 1/2$ $\sup_{x\geq 0} |f_n(x)|$ ne tend pas vers 0 quand $n\to\infty$ et la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$

si $0<\alpha<1/2$ $\sup_{x \geq 0} |f_n(x)| \to 0$ quand $n \to \infty$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$

3. L'étude précédente montre que f_n est décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty[$. Donc si $h>0$ est donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < h$ et donc pour tout $n \geq N$ f_n est décroissante sur $[h,+\infty[$. Il en résulte que :

$n \geq N \Rightarrow \sup_{x\geq h} |f_n(x)| = \sup_{x \geq h} f_n(x) = f_n(h) = n^\alpha h e^{-\frac{nh^2}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc la convergence de (f_n) vers la fonction nulle est uniforme sur $[h, +\infty[$

4. a. si $x=0$ $f_n(x)=0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

si $x>0$ $n^2 f_n(x) = n^3 x e^{-nx^2/2} \to 0$ quand $n \to \infty$

ce qui prouve la convergence simple de la série de terme général $f_n(x)$)

Donc finalement, on a la convergence simple sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions de terme général f_n.

. Continuité de S: soit $x_0>0$. Montrons que S est continue en x_0.

Soit a t.q. $0<a<x_0$: la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ puisque $\forall x \geq a$ $|f_n(x)| = nxe^{-nx^2/2} \leq nae^{-na^2/2}$

dès que n est t.q. $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq a$. La convergence en résulte puisque nous avons vu que la série de terme général $nae^{-na^2/2}$ est convergente.

Donc, les f_n étant continues en x_0, S est continue en x_0 et ça, pour tout $x_0>0$.

Finalement S est continue sur $]0,+\infty[$.

b. On a $\forall x>0$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} nxe^{-nx^2/2} = \sum_{n=1}^{m} -\frac{d}{dx}\left(e^{-nx^2/2}\right) = -\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{m} e^{-nx^2/2}$$

$$\sum_{n=1}^{m} e^{-nx^2/2} = \sum_{n=1}^{m}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^n = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{mx^2}{2}}-1}{e^{-x^2/2}-1} = \frac{e^{-\frac{mx^2}{2}}-1}{1-e^{x^2/2}}$$

$$S_m(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-\frac{mx^2}{2}}-1}{e^{x^2/2}-1}\right] = \frac{-mxe^{-mx^2/2}\left(e^{\frac{x^2}{2}}-1\right) - x\left(e^{-\frac{mx^2}{2}}-1\right)e^{\frac{x^2}{2}}}{\left(e^{x^2/2}-1\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(e^{x^2/2}-1\right)^2}\left[-(m+1)xe^{\frac{(1-m)x^2}{2}} + mxe^{-\frac{mx^2}{2}} + xe^{\frac{x^2}{2}}\right]$$

D'où $\forall x>0$ $S(x) = \lim_{m\to\infty} S_m(x) = \frac{xe^{x^2/2}}{\left(e^{x^2/2}-1\right)^2}$ et $S(0)=0$

c. or quand $x \to 0$ $e^{x^2/2}-1 \sim \frac{x^2}{2}$ donc $S(x) \sim xe^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{4}{x^4} = \frac{4e^{x^2/2}}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$

Donc S n'est pas continue en 0.