

---

**Feuille d'exercices numéro 5**  
ESPACES VECTORIELS, FAMILLES LIBRES ET GÉNÉRATRICES

---

**Exercice 5.1**

Parmi les sous-ensembles de  $\mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{R}^3$  ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x - 3y = 0\}$ .
2. L'ensemble  $D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$ .
3. L'ensemble  $D_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0\}$ .
4. L'ensemble  $D_4 = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbf{R}\}$ .
5. L'ensemble  $D_5 = (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+) \cup (\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^-)$ .
6. L'ensemble  $D_6 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 - 12xy = 0\}$ .
7. L'ensemble  $D_7 = \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}\}$ .
8. L'ensemble  $D_8 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : xy + yz + z + x = 0\}$ .
9. L'ensemble  $D_9 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$ .
10. L'ensemble  $D_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = 0\}$ .

**Exercice 5.2**

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. Dans  $\mathbf{R}^2$  : (a)  $((3, 2), (4, -1))$  (b)  $((3, 2), (4, -1), (5, -2))$ .
2. Dans  $\mathbf{R}^3$  : (a)  $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$  (b)  $((1, 1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 1))$

**Exercice 5.3**

Pour quels  $\alpha \in \mathbf{R}$  la famille  $(3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, \alpha)$  est-elle libre dans  $\mathbf{R}^4$  ?

**Exercice 5.4**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ , et  $e, f, g$  trois vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ . On pose  $u = e + f$ ,  $v = e + g$  et  $w = f + g$ .

1. Montrer que la famille  $(e, f, g)$  est libre si et seulement si la famille  $(u, v, w)$  est libre.
2. Montrer que le sous-espace engendré par  $(e, f, g)$  est égal au sous-espace engendré par  $(u, v, w)$ .

**Exercice 5.5**

Dans  $\mathbf{Q}^3$ , on considère les vecteurs  $u = (1, -1, 1)$ ,  $v = (0, -1, 2)$  et  $w = (1, -2, 3)$ .

1. La famille  $(u, v, w)$  est-elle libre ?
2. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $(u, v, w)$ . Donner une base de  $F$ .
3. Soit  $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3 : x + 2y + z = 0\}$ . Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{Q}^3$ , puis que  $F = G$ .

**Exercice 5.6**

Montrer que les deux familles de vecteurs  $((1, 2, -1, 3), (2, 4, 1, -2), (3, 6, 3, -7))$  et  $((1, 2, -4, 11), (2, 4, -5, 14))$  engendrent le même sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}^4$ .

**Exercice 5.7**

Soit  $n \in \mathbf{N}$ , et soient  $e_1, \dots, e_k$  des vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ . On note  $\Phi : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'application définie pour  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$  par

$$\Phi[(\lambda_1, \dots, \lambda_k)] = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k.$$

1. Montrer que  $(e_1, \dots, e_k)$  est générateur de  $\mathbf{R}^n$  si et seulement si  $\Phi$  est une surjection.
2. Montrer que  $(e_1, \dots, e_k)$  est libre si et seulement si  $\Phi$  est une injection.

### Exercice 5.8

1. Donner un exemple d'entier  $n$  et de deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^n$  dont la réunion n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ .
2. Soit  $n \in \mathbf{N}$ , et soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^n$  tels que  $F \cup G$  soit un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ . Montrer que  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

### Exercice 5.9

Soient  $F, G, H$  trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .

1. Montrer que  $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$ , et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que  $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap (G + (F \cap H))$ .

### Exercice 5.10

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ , et soit  $(u, v, w)$  une famille libre de  $\mathbf{R}^n$ . On note

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n : \exists(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x = (\alpha + \beta)u + (\alpha + 2\beta)v + (\alpha + 3\beta)w\}.$$

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ .
2. Les vecteurs  $u, v$  et  $w$  appartiennent-ils à  $F$  ?
3. Donner une base de  $F$ .

### Exercice 5.11

Soit  $n \geq 0$  un entier. On note  $\mathbf{R}_n[X]$  l'espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

1. Quelle est la dimension de  $\mathbf{R}_n[X]$  ?
2. Soit  $(P_0, \dots, P_n)$  une famille de polynômes telle que chaque  $P_k$  soit de degré  $k$ . Montrer que cette famille est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .
3. Soit  $a$  un réel. Comment s'expriment les coordonnées d'un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$  dans la base  $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$  ?

### Exercice 5.12

Soit  $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$  l'espace des applications de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{R}$ .

1. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel usuelle sur  $E$ .
2. Les sous-ensembles suivants de  $E$  sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
  - (a) L'ensemble des applications linéaires ?
  - (b) L'ensemble des applications continues ?
  - (c) L'ensemble des applications de classe  $C^\infty$  ?
  - (d) L'ensemble des applications surjectives ?
  - (e) L'ensemble des applications  $f$  telles que  $f^{-1}(\mathbf{R}^*)$  est fini ?

### Exercice 5.13

Dans l'espace  $E$  de l'exercice précédent, montrer que les familles suivantes sont libres (par abus de notation, on note parfois dans la liste qui suit  $f(x)$  pour signifier  $f$ )

1.  $(\sin, \cos)$ ,
2.  $(x, x^2, x^3)$ ,
3.  $(e^x, e^{2x}, e^{3x})$ ,
4.  $(e^{ax}, e^{bx}, e^{cx})$ , où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels distincts.