
Feuille d'exercices n ° 4

VALEURS PROPRES, SOUS-ESPACES PROPRES, POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Exercice 1

Pour chacun des endomorphismes suivants, déterminer le spectre et, pour chaque valeur propre, préciser l'espace propre correspondant.

1) L'application identique d'un espace vectoriel E.

2) L'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini par $u_2(x, y) = (x, 0)$.

3) L'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini par $u_3(x, y) = (-y, x)$.

4) L'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ défini par $u_4(z, w) = (-w, z)$.

5) L'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ défini par $u_5(z, w) = (5z + w, 5w)$.

6) Un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire un endomorphisme u dont une puissance pour la composition est nulle.

7) Dans l'espace des suites de réels, u_7 défini par : si (a_n) est une suite de réels, $u_7((a_n))$ est la suite (b_n) définie par $b_n = a_{n+1}$.

8) Dans l'espace des fonctions de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ qui sont dérivables une infinité de fois, u_8 défini par $u_8(f) = f'$.

9) Dans l'espace des fonctions de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ qui sont dérivables une infinité de fois, u_9 défini par $u_9(f) = f''$.

10) Dans l'espace des fonctions de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ qui sont dérivables une infinité de fois et 2π-périodiques, u_{10} défini par $u_{10}(f) = f''$.

Exercice 2

Pour chacune des matrices suivantes, qu'on considèrera successivement comme matrice réelle et comme matrice complexe, calculer le polynôme caractéristique, préciser le spectre et déterminer les espaces propres (dans la dernière, on discutera en fonction du réel θ) :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1) Soit A et B deux matrices carrées (n, n) à coefficients complexes.

a) Montrer que si A ou B est inversible, les matrices AB et BA sont semblables. Donner un exemple montrant que si A et B ne sont ni l'une ni l'autre inversibles, il est possible que AB et BA ne soient pas semblables.

b) On définit par blocs deux matrices $C = \begin{pmatrix} XI & A \\ B & I \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B & XI \end{pmatrix}$. Calculer les produits CD et DC et en déduire que $\det C = \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

2) Dans cette question on suppose A rectangulaire (m, n) et B rectangulaire (n, m) à coefficients complexes, avec $m \leq n$. En faisant des calculs similaires à ceux du 1 b), découvrir une relation entre χ_{AB} et χ_{BA}.

Exercice 4

Soit C une matrice compagnon. Montrer que tous les espaces propres de C sont des droites.

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie notée n et soit u un endomorphisme de E de rang 1.

1) On note v la restriction de u à $\operatorname{Ker} u$. Que vaut χ_v ? En déduire qu'il existe un et un seul réel α tel que $\chi_u = X^{n-1}(X-\alpha)$.

2) Montrer que $u \circ u = \alpha u$.

3) Dans cette question, $E = \mathbf{R}^n$ et u est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique ne comporte que des 1. Que vaut χ_u ? Soit a et b deux réels, que vaut le déterminant de la matrice carrée (n, n) dont la diagonale principale est constituée de coefficients b et tous les autres coefficients sont égaux à a ?

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie notée n, et soit α un réel.
Soit u un endomorphisme de E qui vérifie : $u \circ u = \alpha u$.

1) Rappeler (ou découvrir...) la démonstration du fait "bien connu" suivant : si p est un endomorphisme de E qui vérifie $p \circ p = p$, alors $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$, les sous-espaces $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires et p est la projection sur l'image parallèlement au noyau. (Indication : tout ça repose sur la simple décomposition : $x = (x - p(x)) + p(x)$.

2) Dans cette question, on suppose $\alpha \neq 0$. En posant $p = \dfrac{1}{\alpha} u$, montrer que le spectre de u a au plus deux éléments, que le polynôme caractéristique de u est scindé et que la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée dans le polynôme caractéristique.

3) Dans cette question, on suppose $\alpha = 0$. Soit A une matrice de u. Montrer que A n'a pas de valeur propre complexe non nulle. En déduire le polynôme caractéristique de u.

Exercice 7
Soit $n \geq 1$ un entier.
Pour ω racine n-ème de l'unité, on note $X_\omega = {}^t(1 \quad \omega \quad \omega^2 \quad \ldots \quad \omega^{n-1})$, qui est une matrice-colonne $(n, 1)$.
Pour $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$, on note $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ la matrice (dite "'circulante") :

$$M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

1) Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$. Montrer que tous les vecteurs X_ω sont propres pour $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, et préciser les valeurs propres associées. (On exprimera la réponse à l'aide du polynôme P défini par : $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$.)

2) En considérant plus spécifiquement la matrice $M(0, 1, 0, \ldots, 0)$, montrer que les X_ω constituent une base de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbf{C})$.

3) Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ un n-uplet de nombres complexes, on note M pour $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ puis u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbf{C})$ défini par $u(X) = MX$. Quelles sont les matrices respectives de u dans la base canonique et dans la base constituée par les X_ω ? En déduire le déterminant de M et le polynôme caractéristique de M.

Exercice 8
Soit $n \geq 1$ un entier.

1) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Dans cette question, on suppose que u n'est pas une homothétie.
Montrer qu'il existe un sous-espace de $\mathbf{C}^n$, ni égal à $\{0\}$ ni égal à $\mathbf{C}^n$ tout entier, qui soit stable par tous les endomorphismes qui commutent avec u.

2) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. On suppose que u commute avec tous les éléments de $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Montrer, en utilisant la question 1, que u est une homothétie.

3) Soit A une matrice carrée réelle (n, n) qui commute avec toutes les matrices carrées réelles (n, n). Montrer que A commute avec toutes les matrices carrées complexes (n, n) et en déduire que A est une matrice scalaire (i. e. une matrice de la forme λI_n, où $\lambda \in \mathbf{R}$).

4) Dans la question 2), on remplace $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}$. Le résultat est-il encore vrai ? Et dans la question 1) ?