1 Équations différentielles d'ordre 1

Une *équation différentielle* (scalaire) *d'ordre 1* s'écrit de façon générale $y' = f(y,t)$, où f est une fonction donnée (à valeurs réelles).

Definition 1 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : U \times I \to \mathbb{R}$. On appelle* solution de l'équation différentielle

$$y' = f(y,t)$$

toute fonction φ dérivable sur un intervalle $J \subset I$ telle que

$$\forall t \in J\,, \quad \varphi'(t) = f(\varphi(t),t)\,.$$

Interprétation graphique Par définition, en chaque point $(t,\varphi(t))$ de la courbe représentative d'une solution φ de $y' = f(y,t)$, la tangente à cette courbe a pour *coefficient directeur* $f(\varphi(t),t)$.

Exemples

- $U = \mathbb{R}$, $f(y,t) = a(t)y + b(t)$: on dit que l'équation différentielle

$$y' = a(t)y + b(t)$$

  est *linéaire* (car la fonction $y \mapsto a(t)y$ est linéaire) avec *terme source* ou encore avec *second membre* $b(t)$. Cette équation est un modèle de croissance de population, dans lequel $a(t)$ représente le taux d'accroissement naturel (c'est-à-dire le taux de natalité moins le taux de mortalité) de la population à l'instant t, et $b(t)$ représente le nombre d'individus venant s'ajouter (ou se retrancher si $b(t)$ est négatif) à cette population par unité de temps (en raison de migrations par exemple). Les solutions de $y' = a(t)y + b(t)$ s'expriment toutes au moyen de la *formule de Duhamel* :

$$\varphi(t) \;=\; \varphi(t_0)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \;+\; \int_{t_0}^t b(s)\,\mathrm{e}^{\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}s\,.$$

  En pratique, on calcule le premier morceau comme *solution générale de l'équation homogène* $y' = a(t)y$, puis on cherche une *solution particulière de l'équation inhomogène* par la « *méthode de variation de la constante* » : on constate qu'une fonction de la forme

$$\psi : t \mapsto C(t)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

  (où $C(t)$ est la « constante variable » venant remplacer $\varphi(t_0)$ dans la solution générale de l'équation homogène) est solution de $y' = a(t)y + b(t)$ si et seulement si la fonction C vérifie pour tout t :

$$C'(t) = b(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,.$$

- $U = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$, $f(y,t) = y^2$ (indépendent de t) : l'équation différentielle non-linéaire

$$y' = y^2$$

est attribuée à *Riccati*, de même que plus généralement toute équation différentielle de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$$

(c'est-à-dire dans laquelle la fonction f est polynomiale de degré 2 en y). Hormis $y' = y^2$, l'exemple le plus célèbre d'équation de Riccati est l'équation de *Verhulst* ou *équation logistique*

$$y' = ay(1 - y/K)\,,$$

version non-linéaire du modèle de croissance de population mentionné ci-dessus, dans laquelle $a > 0$ est le taux de natalité, et $K > 0$ est tel que ay/K représente le taux de mortalité, supposé dépendre linéairement de y donc.
En pratique, toute solution de $y' = y^2$ ne s'annulant pas s'obtient en « intégrant à vue » l'équation

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2} = 1\,,$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{\varphi(t)} + \frac{1}{\varphi(t_0)} = t - t_0\,,$$

d'où

$$\varphi(t) = \frac{\varphi(t_0)}{1 - (t - t_0)\varphi(t_0)}\,,$$

« tant que » $1 - (t - t_0)\varphi(t_0) \neq 0$. On voit ainsi que, si par exemple $\varphi(t_0) > 0$, la solution n'est définie que sur l'intervalle $]-\infty, t_0 + 1/\varphi(t_0)[$. C'est un exemple où l'intervalle J (de la définition 1) est strictement inclus dans l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

- $U = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$, $f(y,t) = \sqrt{|y|}$ (indépendent de t) : l'équation différentielle non-linéaire

$$y' = \sqrt{|y|}$$

est le prototype d'équation où f est continue mais pas Lipschitzienne.
En pratique, toute solution à valeurs strictement positives de $y' = \sqrt{y}$ s'obtient en intégrant à vue

$$\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi}} = 1\,,$$

ce qui donne

$$2(\sqrt{\varphi(t)} - \sqrt{\varphi(t_0)}) = t - t_0\,,$$

ou encore

$$\varphi(t) = \left(\sqrt{\varphi(t_0)} + \frac{t - t_0}{2}\right)^2\,.$$

On constate que cette formule donne encore une solution pour $t_0 = 0$, $\varphi(t_0) = 0$: la fonction $\psi : t \mapsto t^2/4$ est ainsi une solution différente de la solution évidente qu'est la fonction nulle, et toutes deux s'annulent en zéro. C'est un exemple où l'unicité du théorème qui suit est mise en défaut.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : U \times I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose en outre que f est* localement Lipschitzienne *par rapport à sa première variable y. Alors quels que soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in U$, il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant t_0 et une unique solution φ de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ sur J telle que $\varphi(t_0) = y_0$ (*condition initiale*). De plus φ est de classe $\mathscr{C}^1$.*

Remarque 1 *D'après le théorème des accroissements finis l'hypothèse « f localement Lipschitzienne par rapport à y » est automatiquement satisfaite si f est de classe $\mathscr{C}^1$. La fonction $y \mapsto \sqrt{|y|}$ rencontrée dans le troisième exemple ci-dessus n'est ni de classe $\mathscr{C}^1$ ni même localement Lipschitzienne (en zéro).*

Ce théorème est admis (et d'ailleurs hors programme). On en décline des variantes dans la suite, qui elles sont au programme, à commencer par celui concernant les équation différentielles linéaires.

Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz linéaire) *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et a, $b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors quels que soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution φ de l'équation différentielle $y' = a(t)y + b(t)$ sur I telle que $\varphi(t_0) = y_0$. De plus φ est de classe $\mathscr{C}^1$.*

La démonstration (vue en S1) découle du calcul rappelé plus haut. Noter que les solutions ainsi obtenues sont *globales*, c'est-à-dire définies sur tout l'intervalle I : ceci est dû au fait que les applications linéaires sont *globalement Lipschitziennes* (contrairement à la fonction quadratique $y \mapsto y^2$ par exemple). Par ailleurs, le théorème vaut aussi pour a et b à valeurs complexes : les solutions sont alors aussi à valeurs complexes.

Plus généralement, on peut s'intéresser aux équations (dites non résolues) de la forme

$$a(t)y' + b(t)y = c(t)\,.$$

Sur un intervalle où a ne s'annule pas, les solutions d'une telle équation relèvent du théorème précédent (appliqué à $-b/a$ au lieu de a et c/a au lieu de b). Il s'agit ensuite d'étudier la possibilité de « raccorder » deux telles solutions : si a s'annule en t_*, il faut chercher une solution φ_+ sur intervalle $]t_*, t_+[$ et une solution φ_- sur intervalle $]t_-, t_*[$, admettant des prolongements $\widetilde{\varphi}_+$ et $\widetilde{\varphi}_-$ dérivables respectivement sur $[t_*, t_+[$ et $]t_-, t_*]$ tels que

$$\widetilde{\varphi}_-(t_*) = \widetilde{\varphi}_+(t_*)\,, \quad \widetilde{\varphi}'_-(t_*) = \widetilde{\varphi}'_+(t_*)\,.$$

Exemple 1 *Par la méthode de variation de la constante, on trouve que les solutions de*

$$ty' + y = \cos t$$

sont, en dehors de zéro, de la forme

$$\varphi(t) = \frac{k + \sin t}{t}\,.$$

Le seul raccord possible en $t = 0$ donne $k = 0$, et la solution

$$\psi(t) = \frac{sint}{t}\,.$$

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Definition 2 *On appelle* équation différentielle linéaire d'ordre 2 *une équation différentielle de la forme*

$$y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = f(t) \tag{1}$$

*où b, c et f sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert non vide I et à valeurs réelles ou complexes. Une solution de (1) est une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ deux fois dérivable (*c'est-à-dire *dérivable et dont la dérivée est elle-même dérivable) sur un intervalle ouvert non vide $J \subset I$ et telle que, pour tout $t \in J$,*

$$\varphi''(t) \,+\, b(t)\,\varphi'(t) \,+\, c(t)\,\varphi(t) \,=\, f(t)\,.$$

L'équation différentielle

$$y'' \,+\, b(t)\,y' \,+\, c(t)\,y \,=\, 0 \tag{2}$$

est l'équation homogène *associée à* (1)*. Lorsque les fonctions b et c sont constantes, on dit que l'équation différentielle* (1) *est* à coefficients constants*.*

Si b et c sont des nombres réels ou complexes, l'équation différentielle *homogène à coefficients constants*

$$y'' \,+\, b\,y' \,+\, c\,y \,=\, 0 \tag{3}$$

se résout explicitement par une méthode analogue à celle employée pour les récurrences linéaires d'ordre 2.

Proposition 1 *Si $b,\, c \in \mathbb{R}$, pour tout $(t_0, u_0, u_1) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de* (3) *telle que $\varphi(t_0) = u_0$, $\varphi'(t_0) = u_1$. Considérons l'équation du second degré*

$$\tau^2 + b\tau + c = 0\,. \tag{4}$$

Si l'équation (5) *a deux solutions réelles distinctes τ_1 et τ_2, alors φ est de la forme*

$$\varphi(t) \,=\, \lambda_1 \exp(\tau_1 t) \,+\, \lambda_2 \exp(\tau_2 t)\,.$$

Si l'équation (5) *a deux solutions complexes conjuguées $\tau_1 = \alpha + i\beta$ et $\tau_2 = \alpha - i\beta$, alors φ est de la forme*

$$\varphi(t) \,=\, \exp(\alpha t)\,(\lambda_1 \cos(\beta t) \,+\, \lambda_2 \sin(\beta t))\,.$$

Si l'équation (5) *a une seule solution réelle τ_0, alors φ est de la forme*

$$\varphi(t) \,=\, \exp(\tau_0 t)\,(\lambda_1 + \lambda_2 t)\,.$$

Dans tous les cas, le couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ est déterminé de façon unique par la donnée de (u_0, u_1).

Démonstration. On constate par le calcul que, si τ est solution de (5), alors la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\tau t)$ est une solution de (3) : si τ est réel, c'est bien une fonction à valeurs réelles ; si $\tau = \alpha + i\beta$ n'est pas réel, alors $\bar{\tau}$ est aussi solution de (5), et $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$ est une solution de (3) à valeurs réelles. Par conséquent, l'ensemble

$$E \,:=\, \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ \varphi \ \text{est solution de}\ (3)\}$$

est non vide. D'autre part, on vérifie sans difficulté que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que l'application

$$\begin{array}{rccl} \Theta : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \varphi & \mapsto & (\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \end{array}$$

est linéaire. Admettons provisoirement que Θ est injective. Alors E est de dimension au plus égale à deux.

Or, selon les racines de (5), les fonctions $e_j : t \mapsto \exp(\tau_j t)$, $j = 1, 2$, ou bien les fonctions $e_1 : t \mapsto \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$ et $e_2 : t \mapsto \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$, ou bien les fonctions $e_1 : t \mapsto \exp(\tau_0 t)$ et $e_2 : t \mapsto t\exp(\tau_0 t)$, forment une famille de deux éléments indépendants de E : on vérifie à nouveau par le calcul que ce sont des solutions de (2), et leur indépendance s'obtient en observant que s'il existait $\mu_j \in \mathbb{R}$ tels que $\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = 0$ alors on aurait

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mu_1 e_1(t) + \mu_2 e_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 e_1'(t) + \mu_2 e_2'(t) = 0\,,$$

et donc en particulier

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_1 e_1(0) + \mu_2 e_2(0) = 0\,, \\ \mu_1 e_1'(0) + \mu_2 e_2'(0) = 0\,. \end{array}\right.$$

On montre dans les trois cas que ce système algébrique en (μ_1, μ_2) a comme seule solution $(0, 0)$, car

$$\text{dét}\begin{pmatrix} e_1(0) & e_2(0) \\ e_1'(0) & e_2'(0) \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Par conséquent, si Θ est bien injective, l'espace vectoriel E est exactement de dimension 2, ce qui signifie que toutes les solutions de (3) sont des combinaisons linéaires de e_1 et e_2, comme annoncé.

Il reste donc à prouver que Θ est injective, c'est-à-dire que si φ est une solution de (3) telle que $\varphi(t_0) = 0$, $\varphi'(t_0) = 0$, alors φ est identiquement nulle. Considérons pour cela la fonction $\psi : t \mapsto \psi(t) := \varphi(t)^2 + (\varphi'(t))^2 \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\psi'(t) \;=\; 2\,\varphi'(t)\,(\varphi(t) \,-\, b\,\varphi'(t) \,-\, c\,\varphi(t)) \;\leq\; a\,\psi(t)\,,$$

avec $a = 2|b| + |1 - c|$. Par conséquent, la fonction $t \mapsto \psi(t)\,\exp(-at)$ est décroissante. Comme elle vaut 0 en t_0, elle est nulle pour tout $t \geq t_0$. En appliquant le même argument à la fonction $t \mapsto \psi(t_0 - t)$, on en déduit que ψ est identiquement nulle, et par suite φ aussi. $\square$

Le résultat précédent se décline aussi pour les équations à coefficients complexes et les solutions à valeurs complexes.

Proposition 2 *Si b, $c \in \mathbb{C}$, pour tout $(t_0, u_0, u_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$, il existe une unique solution $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de* (3) *telle que $\varphi(t_0) = u_0$, $\varphi'(t_0) = u_1$. Considérons l'équation du second degré*

$$\tau^2 + b\tau + c = 0\,. \tag{5}$$

Si l'équation (5) *a deux solutions distinctes τ_1 et τ_2, alors φ est de la forme*

$$\varphi(t) \;=\; \lambda_1\,\exp(\tau_1 t) \;+\; \lambda_2\,\exp(\tau_2 t)\,.$$

Si l'équation (5) *a une seule solution τ_0, alors φ est de la forme*

$$\varphi(t) \;=\; \exp(\tau_0 t)\,(\lambda_1 + \lambda_2 t)\,.$$

Dans tous les cas, le couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ est déterminé de façon unique par la donnée de (u_0, u_1).

Si b et c sont des nombres réels ou complexes et si f est une fonction continue, on peut rechercher des solutions de l'équation différentielle *à coefficients constants avec terme source*

$$y'' \,+\, b\,y' \,+\, c\,y \;=\; f(t) \tag{6}$$

par une « méthode de variation de la constante » . En choisissant $e_j : t \mapsto \exp(\tau_j t)$ comme solution de référence de l'équation homogène (2), cela revient à chercher une *fonction* λ_j telle que

$$t \mapsto \lambda_j(t)\, e_j(t)$$

soit solution de (1). Comme e_j ne s'annule pas, on est ramené à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 pour λ_j' :

$$\lambda_j'' + (b + 2\tau_j)\lambda_j' = f/e_j\,.$$

Cette approche se généralise aux équations à coefficients variables, comme on le verra plus loin.

Théorème 3 (Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires du second ordre) *Soient b, c et f des fonctions continues sur un intervalle ouvert non vide I et à valeurs réelles ou complexes. Soient $t_0 \in I$, $u_0 \in \mathbb{C}$, $u_1 \in \mathbb{C}$. Alors le problème de Cauchy*

$$(P) \qquad y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t)\,,\ y(t_0) = u_0\,,\ y'(t_0) = u_1\,,$$

admet une unique solution $\varphi \in \mathscr{C}^2(I;\mathbb{C})$.

Nous l'admettrons. Il est néanmoins important (et au programme) de savoir que la solution de (P) est la somme d'une solution particulière de $y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t)$ et de la « solution générale » de l'équation homogène $y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$, nous y revenons plus loin.

Remarque 2 *Une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^2(I;\mathbb{C})$ est solution de (P) si et seulement si la fonction $\Phi : t \mapsto (\varphi(t), \varphi'(t))^T$, qui appartient à $\mathscr{C}^1(I;\mathbb{C}^2)$, est solution du problème*

$$(S) \qquad U' = A(t)U + F(t)\,,\ U(t_0) = U_0\,,$$

où

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(t) & -b(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \ U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Attention, lorsque les matrices $A(t)$ ne commutent pas entre elles (ce qui est le cas ici lorsque a et b ne sont pas constantes), il n'y a pas de formule générale de résolution de (S), et donc pas non plus de formule générale de résolution de (P).

Proposition 3 *Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de (2), soit la fonction $W : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$W(t) = \text{dét}\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Alors

- *ou bien W est identiquement nulle,*
- *ou bien W ne s'annule pas.*

Démonstration. On vérifie que W est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $z' = -bz$. On sait que la solution d'une telle équation est identiquement nulle si elle s'annule en un point.

Definition 3 *On appelle* Wronskien *de l'équation différentielle* (2) *toute fonction* $W : I \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$W(t) = \text{dét}\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix},$$

où φ_1 *et* φ_2 *sont des solutions* indépendantes *de* (2)*.*

Remarque 3 *Si* φ_1 *et* φ_2 *sont deux solutions indépendantes de* (2) *et si* ψ *est une solution « particulière » de* (1) *alors toute solution* φ *de* (1) *est de la forme*

$$\varphi(t) = \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) + \psi(t)\,.$$

Il n'y a pas de méthode générale pour calculer deux solutions indépendantes de l'équation homogène. Cependant, si on connaît deux telles solutions, on peut calculer une solution particulière de l'équation avec terme source par « variation des constantes ». Il suffit de chercher ψ telle que $\psi(t) = \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \lambda_2(t)\varphi_2(t)$ et $\psi'(t) = \lambda_1(t)\varphi_1'(t) + \lambda_2(t)\varphi_2'(t)$. Ceci demande que $\lambda_1'\varphi_1 + \lambda_2'\varphi_2 = 0$, d'où le système linéaire en (λ_1', λ_2') :

$$\begin{cases} \lambda_1'\varphi_1 + \lambda_2'\varphi_2 = 0\,, \\ \lambda_1'\varphi_1' + \lambda_2'\varphi_2' = f\,. \end{cases}$$

En fait, il « suffit » de connaître une solution de l'équation homogène *ne s'annulant pas* pour calculer toutes les solutions de l'équation avec terme source. En effet, si φ est une telle solution, on cherche $\psi(t) = \lambda(t)\varphi(t)$, et on voit que λ' doit être solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(\lambda')' + (b + 2\varphi'/\varphi)\lambda' = f/\varphi\,.$$