Université Claude Bernard - Lyon 1 Automne 2017
Mathématiques III - PMI 25 septembre 2017. Durée : 1 heure et 30 minutes

Devoir numéro 1

On attend une rédaction correcte ; les réponses peu compréhensibles ou mal justifiées seront sanctionnées. Les exercices sont indépendants. Le sujet est imprimé sur une feuille recto-verso (deux pages)

Exercice 1
On note A la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et $I = I_4$ la matrice (4,4) identité.
On note $E = \mathcal{M}_{4,1}$ l'espace (de dimension quatre) des matrices-colonne ayant quatre coefficients. On définit trois sous-espaces de E par :

$$E_0 = \operatorname{Ker} A \qquad E_1 = \operatorname{Ker}(A - I) \qquad E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I).$$

1) Montrer que $\dim(E_1) = 1$ en explicitant une base de cet espace.

2) Montrer que $\operatorname{rg} A = 2$ et en déduire la dimension de E_0.

3) Soit $X \in E_0$, $Y \in E_1$ et $Z \in E_2$ trois matrices-colonne. On suppose que $X + Y + Z = 0$. En multipliant cette identité par A puis par A^2, en déduire que $X = Y = Z = 0$. Qu'a-t-on montré ?

4) Déterminer la dimension de E_2, puis montrer que $E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 = E$.

5) Soit $W \in E$. Montrer que (W, AW, A^2W, A^3W) n'est pas une base de E. (On pourra décomposer W selon la somme directe de la question précédente).

Exercice 2
Pour d entier naturel, on note $\mathbf{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à d.

1) Soit $d \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{R}_d[X]$. Montrer que $P - P' \in \mathbf{R}_d[X]$.

2) Soit $d \in \mathbf{N}$, on note $\varphi_d : \mathbf{R}_d[X] \to \mathbf{R}_d[X]$ définie par $\varphi_d(P) = P - P'$. Montrer que φ_d est linéaire, puis que φ_d est bijective.

3) Soit φ l'application linéaire de $\mathbf{R}[X]$ vers $\mathbf{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P - P'$. Est-ce que φ est bijective ?

TSVP

Exercice 3

Première partie : preuves d'intégrabilité

1) Soit $x > 0$ et $c > 0$ deux réels. Montrer que la fonction $f_c : u \mapsto \dfrac{e^{-cu} - 1}{u}$ est intégrable sur $]0, x]$.

2) Soit $x > 0$ et $c > 0$ deux réels. Montrer que la fonction $g_c : u \mapsto \dfrac{e^{-cu}}{u}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$.

3) Soit $a > 0$ et $b > 0$ deux réels. Montrer que la fonction $h_{a,b} : u \mapsto \dfrac{e^{-au} - e^{-bu}}{u}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

4) Montrer que la fonction $k : t \mapsto e^{-t}(\ln t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Deuxième partie : calcul d'une intégrale

5) Soit $\epsilon > 0$, $x > 0$ deux réels.

a) Montrer l'identité :

$$\int_\epsilon^x \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \ln x + \ln \epsilon.$$

b) En effectuant une intégration par parties, en déduire l'identité :

$$(*) \qquad \int_\epsilon^x \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_\epsilon^{+\infty} e^{-t}(\ln t)\, dt - \ln x + \ln \epsilon - e^{-\epsilon}(\ln \epsilon).$$

6) Dans cette question, on note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)\, dt$.

a) En faisant tendre ϵ vers 0 dans $(*)$, montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = -\ln x + I - \int_0^x \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt.$$

b) En déduire que :

$$(**) \qquad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = -\ln x + I + o(1) \qquad \text{quand } x \to 0.$$

7) Soit $a > 0$ et $b > 0$ deux réels. En utilisant judicieusement la relation $(**)$, calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}\, ds.$$