Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2021-2022

Algèbre III 26 janvier 2022

Examen final (épreuve de substitution) du 26 janvier 2022

durée 120 minutes

Les documents et calculatrices ne sont pas permis. Les télephones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (3 pts.). Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 & a+2 \\ a & a & a \\ 5 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ avec $a \in \mathbb{C}$. Déterminer le déterminant de A en fonction de a et donner le rang de A dans chaque cas.

Exercice 2 (6 pts.). Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le polynôme minimal de A
3. Déterminer la décomposition de Dunford de A.

Exercice 3 (7 pts.). On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ et

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+3} = -3u_{n+2} + 4u_n.$$

On chercher à déterminer u_n pour tout $n \geq 0$.

1. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, déterminer une matrice A telle que la relation de récurrence définissant (u_n) soit équivalente à $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que 1 et -2 sont les valeurs propres de la matrice A et que A est trigonalisable et non-diagonalisable.
3. À l'aide de A, calculer u_n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 4 (6 pts.). Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme minimal de u est $X^2(X-1)$ (on admet qu'un tel endomorphisme existe).

1. Montrer le polynôme $X(X-1)$ est anulateur de u^2.
2. Déterminer le polynôme minimal de u^2.
3. En déduire qu'il existe un endomorphisme u non-diagonalisable tel que u^2 soit diagonalisable. Peut-on trouver un endomorphisme u diagonalisable, tel que u^2 soit non-diagonalisable ?

Exercice 5 (4 pts.). Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$ une matrice de taille 4×4. On suppose que A est de rang 2 et admet exactement deux valeurs propres distinctes dont l'une est 1.

1. Montrer qu'il y a exactement deux polynômes P_1 et P_2, qui peuvent être le polynôme caractéristique de A, lesquels ?
2. Pour chacun des deux polynômes P_i, $i = 1, 2$, trouver une matrice $A_i \in M_4(\mathbb{R})$ telle que P_i est le polynôme caractéristique de A_i. Est-ce qu'on peut choisir A_i diagonalisable ?