Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2011-2012

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère la partie $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(x-1)(x-3) + y^2(y^2-4) = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité $2x^2y^2 \leq x^4 + y^4$ et en déduire une majoration simple de $(x^2+y^2)^2$.
2. En utilisant les coordonnées polaires, montrer que si (x, y) appartient à E, son rayon ρ vérifie $\rho^4 \leq 8\rho^3 + 8\rho^2$. En distinguant les cas $\rho \leq 1$ et $\rho > 1$, en déduire que l'ensemble E est borné.
3. La partie E est-elle compacte ? (On justifiera avec précision la réponse.)

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé. Pour une partie A de E, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. Soit A une partie de E. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers x.
2. Soient A et B deux parties de E. Montrer que $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$. On rappelle que l'ensemble $C + D$ désigne l'ensemble $\{c + d \mid c \in C \text{ et } d \in D\}$.
3. Le but de cette question est de démontrer que l'inclusion précédente peut être stricte.
   (a) Soient A et B deux parties fermées telles que $A+B$ est non fermée. Montrer que l'inclusion en question est stricte.
   (b) En déduire un exemple de parties A et B pour lesquelles l'inclusion $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$ est stricte.

Exercice 3. Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite finie en $(0, 0)$ pour les fonctions f de deux variables réelles définies par les formules suivantes :

1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$,
2. $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^2 - xy + y^2}$ (on pourra montrer dans un premier temps que $x^2 - xy + y^2 \geq \dfrac{3}{4}x^2$),
3. $f(x, y) = \dfrac{xy^4}{x^4 + y^6}$,
4. (a) On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{e^t - 1}{t}$ si $t \neq 0$ et $0 \longmapsto 1 = \varphi(0)$.
   Étudier la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.
   (b) À l'aide de la question précédente, répondre à la question posée pour la fonction $f(x, y) = \dfrac{e^{xy} - 1}{e^x - 1}$.

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $x^2 - xy + y^2 \neq 0$.
2. Soit α un nombre réel positif. On définit la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_\alpha(x, y) = \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f_\alpha(0, 0) = 0$.
   (a) Montrer que f_α est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (b) Montrer que si $\alpha > 1$, la fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   Indication : on pourra utiliser les coordonnées polaires et montrer que $1 - \sin\theta\cos\theta \geq \dfrac{1}{2}$.
   (c) Réciproquement, montrer que si f_α est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors $\alpha > 1$.