Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2011-2012

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.

Les quatre exercices sont indépendants. Le cinquième est un exercice BONUS.

Exercice 1. Étude d'une série

1. **Quelques premiers résultats**
   (a) Déterminer un réel $r > 0$ tel que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n} x^n$ est absolument convergente pour $|x| < r$, et divergente pour $|x| > r$.
   (b) Montrer que la suite de terme général $\frac{\ln n}{n}$ est monotone à partir d'un certain rang que l'on précisera. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.
   (c) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est-elle absolument convergente ?
   (d) Calculer $\int_a^b \frac{\ln t}{t} dt$ où a et b sont des réels strictements positifs vérifiant $a < b$.
2. **Équivalent de la somme partielle**
   Soit n_0 un entier et f une fonction continue et décroissante sur $[n_0; +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout entier $k \in [n_0; +\infty[$, on a $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$.
   (b) En déduire un encadrement de $\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k)$ par deux intégrales que l'on précisera. Expliciter cet encadrement dans le cas où f est la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. (On calculera les intégrales et on précisera n_0.)
   (c) Déterminer, en le justifiant, un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$. (On l'exprimera à l'aide de $\ln n$.)

Exercice 2. Règle de Raabe-Duhamel

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Soit β un réel non nul et $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs satisfaisant $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.
   (a) On pose $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \geq 1$, et tout réel $\alpha > 0$.
   Montrer que l'on a l'égalité $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.
   (b) Si $\beta > 1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge.(On pourra choisir le réel $\alpha \in]1; \beta[$.)

   (c) Si $\beta < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

3. Déterminer, en utilisant la règle de Raabe-Duhamel (i.e les résultats des questions 2.(b) et 2.(c)) la nature des séries de terme général u_n :
   (a) $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$,
   (b) $u_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ où a et b sont deux réels qui ne sont pas des entiers négatifs. (On discutera selon la valeur de $b-a$.)

Exercice 3. Soient A et B deux parties quelconques d'un espace vectoriel normé E. On note $A+B$ l'ensemble $A+B = \{a+b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si A est ouvert, la partie $A+B$ est ouverte (avec B quelconque).
2. Montrer que si A est fermé, et b est un élément de E, la partie $A+\{b\}$ est aussi fermée.
3. En considérant les ensembles $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ et $B = \mathbb{R} \times \{0\}$, montrer qu'il existe des parties A et B fermées pour lesquelles $A+B$ n'est pas fermée.

Exercice 4. On définit sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels l'application

$$\|.\|_\infty : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k & \longmapsto & \displaystyle\max_{0 \le k \le n} |\alpha_k| \end{array}$$

1. Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Est-elle équivalente avec la norme $\|.\|_1$ définie pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ par $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|$?
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ est un fermé pour la norme $\|.\|_\infty$.

Exercice 5. BONUS : un VRAI-FAUX

Dire et justifier avec précision si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$.
2. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable.
3. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.