Partie CCP - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1.

Première partie : Somme et développement asymptotique de la série des inverses des carrés

Le but de cette partie est de calculer $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^\alpha}$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k\geq n}\frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2. Soit f une fonction de classe C^1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Pour tout entier naturel non nul, on pose $D_n(t) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   Démontrer que, pour $t \in]0,\pi]$, on a $D_n(t) = \dfrac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}$.
   (On pourra utiliser le fait que $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

4. On note $\phi : x \in]0;1] \longmapsto \dfrac{x}{\sin(x/2)}$ qu'on prolonge par continuité en 0.
   Montrer que la fonction ϕ est de classe C^1 sur $[0;\pi]$.
   En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi tD_n(t)dt$.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(nt)dt$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$, ainsi que $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(nt)dt$.

6. Déterminer deux réels a et b tels que $\displaystyle\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$.

7. Vérifier alors que $\displaystyle\int_0^\pi (at^2+bt)D_n(t) = S_n - \frac{\pi^2}{6}$.

8. Déduire des questions précédentes que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$.

9. Déduire des questions précédentes que $S_n = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Deuxième partie : application au calcul de deux autres sommes

10. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $L_n = \displaystyle\int_0^\pi xD_n(x)dx$.

    Démontrer que $L_n = \dfrac{\pi^2}{4} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}$.

11. En utilisant les résultats de la première partie, trouver la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

12. En déduire celle de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Problème 2. Sur les propriétés de l'adhérence d'une partie

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On rappelle que l'adhérence de A est l'ensemble $\overline{A} = \{x \in E \mid \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$, où $B(x,r)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon r.

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés de $\overline{A}$.

1. Démontrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers x.

2. Démontrer que la borne inférieure d'une partie non vide et minorée A de $\mathbb{R}$ appartient à $\overline{A}$.

3. On rappelle que pour $x \in E$, la distance $d(x,A)$ vaut $d(x,A) = \inf\limits_{a\in A}\{\|x-a\|\}$.
   Montrer que $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x,A) = 0\}$.

4. Montrer l'égalité $d(x,A) = d(x,\overline{A})$ pour tout $x \in E$.

5. Soit $x \in E$ et $r > 0$. Trouver l'adhérence de la boule ouverte $B(x,r)$.

6. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que l'adhérence de F est aussi un sous-espace vectoriel de E.

7. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. On rappelle que $l \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si et seulement s'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers l.
   Montrer que l est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si et seulement si l appartient à l'intersection $\displaystyle\bigcap_n \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}$.