Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2011-2012

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.
Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est **stable par u** si $u(F) \subset F$.

1. **Quelques généralités**
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des sous-espaces stables par u.
   (b) Soit λ une valeur propre de u. Montrer que le sous-espace propre associé à λ est stable par u.
   (c) Soient x_1 et x_2 deux vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Montrer que $\mathrm{Vect}\{x_1, x_2\}$ est stable par u (on désigne par $\mathrm{Vect}\{x_1, x_2\}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs x_1 et x_2).
2. **Un exemple en dimension** 3
   On considère $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme u dans la base canonique $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A sous forme factorisée (on vérifiera qu'il s'écrit sous la forme $-(X+a)(X-a)^2$ avec $a > 0$).
   (b) En déduire, **sans aucun calcul**, $\mathrm{Ker}(u)$ puis $\mathrm{Im}(u)$.
   (c) Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre a est un plan P dont on donnera une base (v_1, v_2) (exprimer les vecteurs v_1 et v_2 en fonctions des vecteurs de $\mathcal{B}$).
   (d) Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre $-a$ est une droite D dirigée par un vecteur w que l'on exprimera en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
   (e) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
   (f) Déterminer 6 espaces stables par u, non triviaux (*i.e* différents de $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\mathbb{R}^3$). On explicitera une base de chacun de ces espaces à l'aide des vecteurs v_1, v_2 et w.

Exercice 2.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$. En considérant le degré du polynôme caractéristique de A, montrer que A possède au moins une valeur propre réelle.
2. Soit $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.
   (a) Montrer que $X^2 + 1$ divise P. En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme P.
   (b) Peut-on trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est le polynôme P ?

Exercice 3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^{k+1} = A^k$.

1. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $A^{k+q} = A^k$.
2. Exhiber un polynôme annulateur de A^k. En déduire que A^k est diagonalisable.
3. En développant $(A^k - A^p)^m$ pour un entier m bien choisi, démontrer que, pour tout $p \in \{1, \ldots, k-1\}$, $A^k - A^p$ est nilpotente.

Exercice 4. Un vrai-faux :

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors u_{n+1}/u_n a une limite strictement inférieure à 1.
2. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors $(u_n)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si $u_n > 0$, et si la série $\sum u_n$ converge, alors la série de terme général u_n^2 converge.
4. Si $(-1)^n n u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, la série $\sum u_n$ converge.
5. Si $(-1)^n n^2 u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, la série $\sum u_n$ converge.