Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2011-2012

Math III - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1. ($\approx$ 45 min) **Étude de séries dont le terme général est le reste d'une série convergente**

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\sum_{n\geq n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, le reste d'ordre n de la série $\sum a_n$ par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq n_0} R_n$ dans trois exemples différents.

1. **Premier exemple :**
   On pose, pour $n \geq 0$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.
   Calculer R_n, puis montrer que $\sum_{n\geq 0} R_n$ converge et calculer sa somme.
2. **Deuxième exemple :**
   On pose, pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. Nous allons chercher un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.
   Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Montrer que $\forall t \in [k; k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$ vérifiant $N \geq 2$ et $N \geq n+1$, on a $\sum_{k=n+1}^{N} \dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \int_{n+1}^{N+1} \dfrac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \dfrac{1}{k^2}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{n+1} \leq R_n \leq \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   (d) Donner un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   Que peut-on en conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geq 1} R_n$?
3. **Troisième exemple :**
   On pose, pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
   (a) Justifier la convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n$.
   (b) Expression intégrale de R_n :
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite $(I_n)_n$ par $I_n = (-1)^n \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x} dx$.
   i. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
   ii. Montrer que $I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$. On pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.
   iii. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, puis exprimer R_n en fonction de I_n.

(c) Conclusion :

i. En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a $I_n = \dfrac{(-1)^n}{a(n+1)} + \mathcal{O}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ où $a \in \mathbb{R}$, et $\alpha > 1$ sont à déterminer.

ii. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} R_n$.

Problème 2. ($\approx$ 45 min) **Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est $(X-1)^2(X-2)$.

1. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Justifier avec précision la réponse.
2. Donner, en expliquant pourquoi, un exemple de matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal $(X-1)^2(X-2)$.
3. Démontrer, **sans aucun calcul**, que $E = \operatorname{Ker}((u-\operatorname{Id})^2) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id})$.
4. On considère les endomorphismes de E : $p = (u-\operatorname{Id})^2$ et $q = u \circ (2\operatorname{Id} - u)$.
   Calculer $p+q$.
5. Démontrer que l'endomorphisme p est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}((u-\operatorname{Id})^2)$. Que dire de l'endomorphisme q ?
6. Soit x un élément de E.
   (a) Préciser l'élément $(u - 2\operatorname{Id})(p(x))$.
   (b) Déterminer un nombre réel α tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ p = \alpha^k p$.
   (c) On définit l'endomorphisme $\exp(u)$ par $\exp(u) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u^k}{k!}$. On admet que cet endomorphisme est bien défini. Montrer que $\exp(u) \circ p = \beta p$, où β est un réel à déterminer.
7. Que vaut, pour tout entier $k \geq 2$, $(u - \operatorname{Id})^k \circ q$?
   Démontrer que $\exp(u) \circ q = \gamma u \circ q$, où γ est un réel à déterminer (on pourra admettre que si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutent, on a $\exp(f+g) = \exp(f) \circ \exp(g)$ et décomposer u sous la forme $u = \operatorname{Id} + (u - \operatorname{Id})$).
8. Écrire enfin l'endomorphisme $\exp(u)$ comme un polynôme en u.