Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Cursus préparatoire, 1ère année Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 5

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.

Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Justifier que, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $f(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, x + y + z)$.
2. Donner une base de l'image et du noyau de f.
3. On pose $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, -2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$.
4. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2. L'objectif de l'exercice est de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire du second ordre (à coefficients non constants) suivante :

$$(E) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2xf''(x) + f'(x) + f(x) = 0.$$

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction g définie par $g(t) = f(t^2)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer g' et g'' en fonction de f' et f''.
2. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre (à coefficients constants) suivante :

$$(E') \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ g''(t) + 2g(t) = 0.$$

3. Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\varphi \colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = nP - XP'$.

1. Montrer que φ est linéaire, et que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $\deg(\varphi(P)) \leq n - 1$.
2. Déterminer le noyau puis l'image de φ et montrer qu'ils sont supplémentaires.
3. Montrer que la restriction de φ à $\mathrm{Im}(\varphi)$ induit une bijection linéaire de $\mathrm{Im}(\varphi)$ sur lui-même.

Exercice 4. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\frac{t^\alpha + 1}{e^t - 1} dt$.

Le but de l'exercice est de déterminer, selon la valeur du paramètre α, si l'intégrale généralisée $I(\alpha)$ converge ou diverge.

1. Montrer que la fonction $f_\alpha : t \mapsto t\,\dfrac{t^\alpha + 1}{e^t - 1}$ est continue sur $]0; +\infty[$, quelle que soit la valeur de α.
2. En distinguant les trois cas suivants : $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$,
   (a) donner un équivalent de $f_\alpha(t)$ pour t au voisinage de 0^+,
   (b) puis donner un équivalent de $f_\alpha(t)$ pour t au voisinage de $+\infty$.
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t) dt$ est convergente, quelle que soit la valeur de α.
4. Étudier, selon la valeur de α, la convergence ou la divergence de $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t) dt$.
5. Conclure sur la nature de $I(\alpha)$ selon la valeur de α.