Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Cursus préparatoire, 1ère année Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 5 - Correction

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. *Justifier que, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $f(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, x + y + z)$.*
   En lisant les colonnes de la matrice, on voit que $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (2, 0, 1)$, $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, 2, 1)$ et $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$. En utilisant la linéarité de f, on a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(2, 0, 1) + y(0, 2, 1) + z(1, 1, 1) \\ &= (2x + z, 2y + z, x + y + z) . \end{aligned}$$

2. *Donner une base de l'image et du noyau de f.*
   On sait qu'une famille génératrice de l'image de f est $(2, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 1, 1)$; en appliquant la méthode de Gauss à $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient (en remplaçant C_3 par $2C_3 - C_1$) la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les deux dernières colonnes sont égales : ainsi la famille $(2, 0, 1), (0, 2, 1)$ est une famille échelonnée qui engendre l'image de f, donc une base de $\mathrm{Im}(f)$, qui est de dimension 2. On sait donc que le noyau est de dimension 1 ; pour en déterminer une base, on peut résoudre le système correspondant à l'équation $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, qui s'écrit

$$\begin{cases} 2x + z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= -2x \\ x &= y \end{cases} .$$

   Les éléments de $\ker(f)$ sont donc les vecteurs de la forme $(x, x, -2x) = x(1, 1, -2)$ pour $x \in \mathbb{R}$, et une base du noyau est donc le vecteur $(1, 1, -2)$.

3. *On pose $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, -2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$.*
   Pour montrer que $(v_1 v_2, v_3)$ est une base, on peut de nouveau appliquer l'algorithme de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

   Cette matrice et échelonnée et a trois colonnes non nulles, on voit donc que (v_1, v_2, v_3) est libre et, puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$. Ensuite, on calcule $f(v_1) = (3, 3, 3) = 3v_1$; $f(v_2) = (2, -2, 0) = 2v_2$; et $f(v_3) = 0$.

4. *Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.*
   On a vu que $f(v_1) = 3v_1 + 0v_2 + 0v_3$; $f(v_2) = 0v_1 + 2v_2 + 0v_3$; et $f(v_3) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est par conséquent égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. L'objectif de l'exercice est de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire du second ordre (à coefficients non constants) suivante :

$$(E) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2xf''(x) + f'(x) + f(x) = 0.$$

1. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction g définie par $g(t) = f(t^2)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer g' et g'' en fonction de f' et f''.*
   La fonction $t \mapsto t^2$ est deux fois dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction g est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de deux fonctions deux fois dérivables. De plus, on a par la formule de dérivation des fonctions composées :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(t) = 2tf'(t^2) \text{ et } g''(t) = 2f'(t^2) + 4t^2 f''(t^2).$$

2. *Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre (à coefficients constants) suivante :*

$$(E') \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ g''(t) + 2g(t) = 0.$$

   On a la suite d'équivalences suivante (où la quatrième équivalence est par la question 1) :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2xf''(x) + f'(x) + f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ 2t^2 f''(t^2) + f'(t^2) + f(t^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ 4t^2 f''(t^2) + 2f'(t^2) + 2f(t^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ g''(t) + 2g(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow g \text{ solution de } (E') \end{aligned}$$

3. *Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+^*$.*
   L'équation caractéristique associée à (E') est $r^2 + 2 = 0$, qui a pour solutions $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.
   Les solutions de (E') sont donc les fonctions de la forme $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda\cos(\sqrt{2}t) + \mu\sin(\sqrt{2}t)$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
4. *En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.*
   On remarque que, sur $\mathbb{R}_+^*$, la condition $g(t) = f(t^2)$ est équivalente à la condition $f(x) = g(\sqrt{x})$.
   Ainsi, par les questions 2 et 3, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda\cos(\sqrt{2x}) + \mu\sin(\sqrt{2x}),\ \text{pour } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\varphi\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = nP - XP'$.

1. *Montrer que φ est linéaire, et que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $deg(\varphi(P)) \leq n-1$.*
Pour vérifier que φ est linéaire, fixons $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; alors on a

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P+Q) &= n(\alpha P+Q) - X(\alpha P+Q)' \\ &= \alpha nP - \alpha XP' + nQ - XQ' \\ &= \alpha\varphi(P) + \varphi(Q')\ .\end{aligned}$$

On vient de montrer que φ est linéaire ; de plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P(X) = \lambda X^n + Q$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et donc $\varphi(P) = \lambda\varphi(X^n) + \varphi(Q)$. Comme $\varphi(X^n) = 0$, et $\varphi(Q) = nQ - XQ'$ est de degré inférieur ou égal au degré de Q (parce que le degré de XQ' est égal au degré de Q, et qu'une différence de deux polynômes de même degré k est de degré au plus k ; en fait ici, un calcul explicite comme on le fait à la question suivante montre que le degré de $\varphi(Q)$ est égal au degré de Q), on obtient bien que $\varphi(P) = \varphi(Q)$ est de degré $\leq n-1$.

2. *Déterminer le noyau puis l'image de φ et montrer qu'ils sont supplémentaires.*
Pour déterminer le noyau de φ, considérons un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, qu'on écrit sous la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k\ .$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= n\sum_{k=0}^{n}\lambda_k X^k - X\sum_{k=0}^{n} k\lambda_k X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\lambda_k X^k\ .\end{aligned}$$

Un polynôme étant nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls, on voit donc que $P \in \ker(\varphi)$ si, et seulement si, $(n-k)\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, autrement dit si et seulement si $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Ainsi, le noyau de φ est l'ensemble des polynômes de la forme λX^n, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ce noyau est donc de dimension 1 ; par le théorème du rang, l'image de φ est donc de dimension $\dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = n$, et comme on a établi que $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et que ce dernier espace est lui aussi de dimension n, on conclut que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Reste à montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\ker(\varphi)$ sont supplémentaires ; comme on sait que la somme de leurs dimension est égale à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, il nous suffit de vérifier que $\ker(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$. Or, les résultats que nous venons d'obtenir nous donnent

$$\ker(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{\lambda X^n \colon \lambda \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

et cet espace est bien réduit à $\{0\}$.

3. *Montrer que la restriction de φ à $Im(\varphi)$ induit une bijection linéaire de $Im(\varphi)$ sur lui-même.*
On a $\varphi(\mathrm{Im}(\varphi)) \subseteq \varphi(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \mathrm{Im}(\varphi)$, par conséquent φ induit un endomorphisme de $\mathrm{Im}(\varphi)$; notons-le $\tilde{\varphi}$. Comme $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension finie, pour vérifier que $\tilde{\varphi}$ est une bijection il nous suffit de vérifier que $\ker(\tilde{\varphi}) = \{0\}$, ce qui est immédiat puisque $x \in \ker(\tilde{\varphi})$ si et seulement si $x \in \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire $\ker(\tilde{\varphi}) = \ker(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$.

Exercice 4. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\frac{t^\alpha + 1}{e^t - 1}dt$.

Le but de l'exercice est de déterminer, selon la valeur du paramètre α, si l'intégrale généralisée $I(\alpha)$ converge ou diverge.

1. *Montrer que la fonction* $f_\alpha : t \mapsto t\,\dfrac{t^\alpha + 1}{e^t - 1}$ *est continue sur* $]0; +\infty[$*, quelle que soit la valeur de* α*.*
   D'une part $t \mapsto e^t - 1$ est continue sur $]0; +\infty[$ et ne s'y annule pas, et d'autre part $t \mapsto t(t^\alpha + 1)$ est continue sur $]0; +\infty[$ quelle que soit la valeur de α. La fonction f_α est donc continue sur $]0; +\infty[$ quelle que soit la valeur de α. Notons également que f_α est à valeurs positives, ce qui nous permettra plus bas d'utiliser les théorèmes de comparaison.

2. *En distinguant les trois cas suivants :* $\alpha > 0$*,* $\alpha = 0$*,* $\alpha < 0$*,*
   (a) *donner un équivalent de* $f_\alpha(t)$ *pour* t *au voisinage de* 0^+*,*
   Tout d'abord, $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$, donc $\dfrac{t}{e^t - 1} \underset{t\to 0}{\sim} 1$. Ensuite,
   si $\alpha > 0$, alors $t^\alpha + 1 \underset{t\to 0}{\sim} 1$, donc $f_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1$,
   si $\alpha = 0$, alors $\forall\ t > 0,\ t^\alpha + 1 = 2$, donc $f_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2$,
   si $\alpha < 0$, alors $t^\alpha + 1 \underset{t\to 0}{\sim} t^\alpha$, donc $f_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^\alpha$.
   (b) *puis donner un équivalent de* $f_\alpha(t)$ *pour* t *au voisinage de* $+\infty$*.*
   Tout d'abord, $e^t - 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} e^t$, donc $\dfrac{t}{e^t - 1} \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-t}$. Ensuite,
   si $\alpha > 0$, alors $t^\alpha + 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} t^\alpha$, donc $f_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{1+\alpha}e^{-t}$,
   si $\alpha = 0$, alors $\forall\ t > 0,\ t^\alpha + 1 = 2$, donc $f_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2te^{-t}$,
   si $\alpha < 0$, alors $t^\alpha + 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} 1$, donc $f_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-t}$.

3. *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ *est convergente, quelle que soit la valeur de* α*.*
   On sait que, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^\beta e^{-t}dt$ converge. Donc les intégrales $\int_1^{+\infty} t^{1+\alpha}e^{-t}dt$ et $\int_1^{+\infty} te^{-t}dt$ sont toutes deux convergentes. Ainsi, par la question 2.b et le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées, $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ est convergente dans les trois cas $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ et $\alpha < 0$.

4. *Étudier, selon la valeur de* α*, la convergence ou la divergence de* $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)dt$*.*
   Dans les cas $\alpha > 0$ et $\alpha = 0$, $\int_0^1 f_\alpha(t)dt$ converge (par la question 2.a et le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées).
   Par ailleurs, on sait que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^\beta}dt$ converge si et seulement si $\beta < 1$. Donc dans le cas $\alpha < 0$, $\int_0^1 f_\alpha(t)dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$ (par la question 2.a et le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées).

5. *Conclure sur la nature de* $I(\alpha)$ *selon la valeur de* α*.*
   Par définition, $I(\alpha)$ converge si et seulement si les intégrales $\int_0^1 f_\alpha(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ sont toutes les deux convergentes. En combinant les questions 3 et 4, on voit donc que $I(\alpha)$ converge pour $\alpha > -1$ et diverge pour $\alpha \leq -1$.