Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 5

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Notations :

Dans tout le texte E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$. On note Id l'endomorphisme identité de E, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$, on appelle projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme p de E qui, à un vecteur x de E se décomposant comme $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, associe le vecteur x_1.

On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice exponentielle de A est la matrice :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

De même, si u est un endomorphisme de E, l'exponentielle de u est l'endomorphisme :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

Les trois parties sont indépendantes.

I. Questions préliminaires

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer les matrices $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A+B)$.
   (Pour $\exp(A+B)$, on donnera la réponse en utilisant les fonctions sh et ch, en admettant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.)
2. Rappeler, sans démonstration, une condition suffisante pour que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient l'égalité $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r$, où r désigne un entier vérifiant $1 \leq r \leq n$.

3. *Polynôme interpolateur de Lagrange* : on note $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $r-1$. On considère l'application linéaire ϕ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par :

$$P \longmapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_r)).$$

   Déterminer le noyau de ϕ, puis en déduire qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

4. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

   (a) Calculer $l_i(\lambda_j)$ selon les valeurs de i et j dans $\{1, \ldots, r\}$.

   (b) En déduire une expression du polynôme L comme une combinaison linéaire des polynômes l_i avec $i \in \{1, \ldots, r\}$.

5. *Une propriété de l'exponentielle* : soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Justifier que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \longmapsto PMP^{-1}$ est une application continue.

   (b) En déduire que : $\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$. (On pourra revenir à la définition de l'exponentielle ainsi que de la convergence d'une série.)

6. Déduire des questions 3 et 5 que $\exp(A) = L(A)$

7. On suppose que E est muni d'une base $\mathcal{B}$ et on désigne par v l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est A. Soit λ une valeur propre de v, et x un vecteur propre associé. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $P(v)(x) = P(\lambda)x$.

8. Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note $E_i = \mathrm{Ker}(v - \lambda_i \,\mathrm{Id})$ le sous-espace propre de v associé à λ_i.

   (a) Démontrer que l'endomorphisme de E, $p_i = l_i(v)$ est le projecteur sur E_i, parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} E_k$ (on dit que les p_i sont les projecteurs spectraux de v).

   (b) En déduire une expression de $\exp(A)$ comme une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux

Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est $(X-1)^2(X-2)$.

9. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Justifier avec précision la réponse.

10. Donner, en expliquant pourquoi, un exemple de matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal $(X-1)^2(X-2)$.

11. Démontrer, **sans aucun calcul**, que $E = \mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$.

12. On considère les endomorphismes de E : $p = (u - \mathrm{Id})^2$ et $q = u \circ (2\,\mathrm{Id} - u)$.
    Calculer $p + q$.

13. Démontrer que l'endomorphisme p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2)$. Que dire de l'endomorphisme q ?

14. Soit x un élément de E.

   (a) Préciser l'élément $(u - 2\,\mathrm{Id})(p(x))$.

   (b) Déterminer un nombre réel α tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ p = \alpha^k p$.

   (c) Montrer que $\exp(u) \circ p = \beta p$, où β est un réel à déterminer.

15. Que vaut, pour tout entier $k \geq 2$, $(u - \mathrm{Id})^k \circ q$?
    Démontrer que $\exp(u) \circ q = \gamma u \circ q$, où γ est un réel à déterminer (on pourra décomposer u sous la forme $u = \mathrm{Id} + (u - \mathrm{Id})$ afin d'exprimer $\exp(u)$ sous la forme $\exp(u) = \exp(\mathrm{Id} + (u - \mathrm{Id}))$).

16. Écrire enfin l'endomorphisme $\exp(u)$ comme un polynôme en u.

Correction du Devoir Surveillé 5 - partie CCP

I. Questions préliminaires

1. • On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc pour tout $k \geq 2$, $A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par suite,

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = A^0 + A^1 = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc on en déduit aussi

$$\exp(B) = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• On calcule $\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Attention, puisque $A.B \neq B.A$, on ne peut pas calculer $\exp(A+B)$ avec la formule $\exp(A)\exp(B)$. On revient donc à la définition en calculant les puissances de $A+B$. De même, on ne calcule pas ces puissances à l'aide du binôme de Newton puisque A et B ne commutent pas. On a

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $(A+B)^{2p} = I_2$ et $(A+B)^{2p+1} = A+B$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!} \text{ car les deux séries convergent} \\
&= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!}\right) I_2 + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!}\right)(A+B) = \mathrm{ch}(1) I_2 + \mathrm{sh}(1)(A+B) \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(1) & \mathrm{sh}(1) \\ \mathrm{sh}(1) & \mathrm{ch}(1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. Une condition suffisante pour que la formule soit valable est que A et B commutent.

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

3. Soit $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$. On a

$$\begin{aligned}
P \in \mathrm{Ker}(\phi) &\iff (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_r)) = 0_{\mathbb{R}^r} \\
&\iff \forall i \in \{1, \dots, r\}, P(\lambda_i) = 0 \\
&\iff \forall i \in \{1, \dots, r\}, \lambda_i \text{ est racine de } P.
\end{aligned}$$

Or P est de degré $r-1$, et à coefficients réels. Puisque $\mathbb{R}$ est un corps, si P non nul, il admet au plus $r-1$ racines, donc on en déduit que P est le polynôme nul. Réciproquement, si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, on a clairement $P \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

Puisque $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$, ϕ est injective. De plus, ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$, et $\dim \mathbb{R}_{r-1}[X] = r = \dim \mathbb{R}^r$, donc ϕ est bijective. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}^r$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\phi(P) = y$. Comme $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_r}) \in \mathbb{R}^r$, on en déduit qu'il existe un unique $L \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

4. (a) Soient $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. Si $i = j$, on a

$$l_i(\lambda_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} 1 = 1,$$

et si $i \neq j$, on a

$$l_i(\lambda_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = \frac{\lambda_j - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^{r} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = 0.$$

Ainsi, $l_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$.

(b) Le polynôme $Q = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $r-1$ vérifiant pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, $Q(\lambda_j) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i(\lambda_j) = e^{\lambda_j} l_j(\lambda_j) = e^{\lambda_j}$. Ainsi, par unicité du polynôme L, on trouve $L = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i(X)$.

5. (a) Notons $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto PMP^{-1}$. Alors φ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, pour tous $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\lambda M_1 + M_2) = P(\lambda M_1 + M_2)P^{-1} = \lambda PM_1P^{-1} + PM_2P^{-1} = \lambda\varphi(M_1) + \varphi(M_2)$. De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc φ est une application linéaire continue.

(b) On a

$$\begin{aligned}
\exp(PDP^{-1}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1} \\
&= \lim_{N \to +\infty} P \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \right) P^{-1} = \lim_{N \to +\infty} \varphi \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \right) \\
&= \varphi \left(\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \right) \quad \text{par continuité de } \varphi \\
&= \varphi(\exp(D)) = P\exp(D)P^{-1}.
\end{aligned}$$

6. Puisque la matrice A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r)$ est une matrice diagonale dans laquelle chaque λ_i apparaît autant de fois que la multiplicité de λ_i (pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$). On obient alors

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= P\exp(D)P^{-1} \quad \text{d'après la question 5} \\
&= P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_r}, \ldots, e^{\lambda_r})P^{-1} \\
&= P\,\mathrm{diag}(L(\lambda_1), \ldots, L(\lambda_1), \ldots, L(\lambda_r), \ldots, L(\lambda_r))P^{-1} \\
&= PL(D)P^{-1} \\
&= L(PDP^{-1}) = L(A).
\end{aligned}$$

7. Puisque x est un vecteur propre de v associé à λ, on a $v(x) = \lambda x$. On montre par une récurrence immédiate que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v^k(x) = \lambda^k x$. Ainsi, si $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut l'écrire sous la forme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, d\}$. On a alors $P(v) = \sum_{k=0}^{d} a_k v^k$, et ainsi $P(v)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k v^k(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k x = P(\lambda)x$.

8. (a) Puisque A est diagonalisable, on a $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k$. Soit $x \in E$, on peut décomposer x de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=1}^{r} x_k$ où $x_k \in E_k = \mathrm{Ker}(v - \lambda_k \,\mathrm{Id})$. Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$, on trouve

$$p_i(x) = l_i(v)(x) = l_i(v)\left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right) = \sum_{k=1}^{r} l_i(v)(x_k).$$

Or si $x_k \neq 0$, x_k est un vecteur propre de v associé à la valeur propre λ_k, et d'après la question précédente, $l_i(v)(x_k) = l_i(\lambda_k)x_k$, et si $x_k = 0$, par linéarité de $l_i(v)$, $l_i(v)(x_k) = 0 = l_i(\lambda_k)x_k$. D'où

$$p_i(x) = \sum_{k=1}^{r} l_i(\lambda_k)x_k = \sum_{k=1}^{r} \delta_{i,k}x_k = x_i.$$

Ainsi, p_i est la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{r} E_k$.

(b) D'après l'étude précédente, on a

$$\exp(A) = L(A) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i(A) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_i)$$

est une combinaison linéaire de matrices de projecteurs (car $l_i(v) = p_i$).

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux

9. Le polynôme minimal de u n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ (car 1 est une racine double) donc u n'est pas diagonalisable.

10. On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de M est égal à $P_M = -(X-2)(X-1)^2$. Puisque le polynôme minimal m_M de M divise P_M d'après Cayley-Hamilton, possède exactement les mêmes racines que P_M et est unitaire, on en déduit que $m_M = (X-2)(X-1)$ ou $(X-2)(X-1)^2$. Or le calcul de la matrice $(M - 2I_3)(M - I_3)$ montre que le polynôme $(X-2)(X-1)$ n'est pas annulateur de M, donc $m_M = (X-2)(X-1)^2$ et ainsi M répond à la question.

11. On utilise le Lemme des noyaux avec les polynômes $(X-1)^2$ et $X-2$ qui sont premiers entre eux car $(X-1)^2 - X(X-2) = 1$ est une relation de Bezout. Ainsi

$$\mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2 \circ (u - 2\,\mathrm{Id})) = \mathrm{Ker}(m_u(u)) = \mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E.$$

12. On a $p + q = (u - \mathrm{Id})^2 + u \circ (2\,\mathrm{Id} - u) = u^2 - 2u + \mathrm{Id} + 2u - u^2 = \mathrm{Id}$.

13. On veut démontrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2)$. Soit on utilise le cours en disant que le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2)$ est le projecteur spectral associé à 2. Donc comme on a la relation de Bezout, $1 = (X-1)^2 - X(X-2)$, le projecteur spectral π_2 est égal au polynôme $(X-1)^2$ évalué en u c'est-à-dire $\pi_2 = (u - \mathrm{Id})^2 = p$. On montre de même que $q = \pi_1$.

    Soit on procède comme suit : on peut écrire tout $x \in E$ de la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$. On a $p(x_1) = (u - \mathrm{Id})^2(x_1) = 0$ car $x_1 \in \mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2)$. On a aussi $p(x_2) = (\mathrm{Id} - u \circ (2\,\mathrm{Id} - u))(x_2) = x_2 + u((u - 2u)(x_2)) = x_2$ car $x_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$. Ainsi pour tout $x \in E$, $p(x) = x_2$ donc p est la projection sur $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2)$. On montre de même que q est la projection sur $\mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$.

14. (a) Soit $x \in E$, on a $p(x) \in \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id})$ donc $(u - 2\operatorname{Id})(p(x)) = 0$.

    (b) On a ainsi, pour tout $x \in E$, $u(p(x)) = 2p(x)$, donc par récurrence immédiate, $u^k(p(x)) = 2^k p(x)$ pour tout $k \geq 1$, c'est-à-dire $u^k \circ p = 2^k p$. Puisque cette expression est aussi valable pour $k = 0$ car $u^0 = \operatorname{Id}$, on obtient donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ p = 2^k p$.

    (c) Par conséquent, $\exp(u) \circ p = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}\right) \circ p = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k \circ p = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}\right) p = e^2 p$.

15. Soit $x \in E$, alors $q(x) \in \operatorname{Ker}((u - \operatorname{Id})^2)$ donc $((u - \operatorname{Id})^2 \circ q)(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Ainsi, $(u - \operatorname{Id})^2 \circ q = 0$ donc pour tout $k \geq 2$, on a $(u - \operatorname{Id})^k \circ q = 0$.

    Enfin, on écrit

$$\begin{aligned} \exp(u) \circ q &= \exp(\operatorname{Id} + (u - \operatorname{Id})) \circ q = \exp(\operatorname{Id}) \circ \exp(u - \operatorname{Id}) \circ q \text{ car } \operatorname{Id} \text{ et } u - \operatorname{Id} \text{ commutent} \\ &= e.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u - \operatorname{Id})^k}{k!} \circ q = e(\operatorname{Id} \circ q + (u - \operatorname{Id}) \circ q) = e(u \circ q). \end{aligned}$$

16. En remettant tous les résultats ensemble, on trouve donc

$$\begin{aligned} \exp(u) &= \exp(u) \circ \operatorname{Id} = \exp(u) \circ (p + q) = \exp(u) \circ p + \exp(u) \circ q \\ &= e^2 p + eu \circ q = e^2 (u - \operatorname{Id})^2 + eu^2 \circ (2\operatorname{Id} - u). \end{aligned}$$