Math II PMI - Partie commune Devoir n° 5- Correction
1 h30, 18 janvier 2012

Exercice 1.

1. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $(1+x)^4$ en 0.
   Réponse. $1 + 4x + o(x)$
2. Donner un développement limité à l'ordre 6 de $\sin^4 x$ en 0.
   Réponse. $(x - x^3/6 + x^5/5! + o(x^6))^4 = x^4(1 - x^2/6 + x^4/5! + o(x^5))^4 = x^4(1 + 4(-x^2/6)) + o(x^6)$.
3. Donner un développement limité à l'ordre 6 de $f(x) = e^{\sin^4 x} - 1$ en 0.
   Réponse. $\exp(x^4(1 - 2/3x^2) + o(x^6)) - 1 = x^4(1 - 2/3x^2) + o(x^6)$.
4. Donner un développement limité à l'ordre 5 de $g(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \cos x - 1$ en 0.
   Réponse. $1/2(x^2 - x^4/2 + o(x^5)) - x^2/2 + x^4/4! + o(x^5) = (1/24 - 1/4)x^4 + o(x^5)$.
5. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $(g/f)(x)$ en 0.
   Réponse. $g/f(x) = (-5/24x^4 + o(x^5))/(x^4 + o(x^5)) = (-5/24 + o(x))/(1 + o(x)) = -5/24 + o(x)$. On remarque que la fonction est paire, donc c'est normal qu'elle n'ait pas de coefficient en x.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. On suppose qu'il existe des constantes $C > 0$ et $D > 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C \text{ et } |f''(x)| \leq D.$$

On veut démontrer qu'il existe une constante $K > 0$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq K$.

1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Donner le développement de Taylor-Lagrange de f à l'ordre 1 entre x_0 et $x_0 + h$ (le reste étant donc d'ordre 2).
   Réponse. $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + 1/2h^2 f''(c)$ avec c entre x_0 et $x_0 + h$.
2. En déduire qu'il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ qu'on déterminera en fonction C et D, telles que

   $$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall h > 0, |f'(x_0)| \leq Ah + B/h.$$

   Réponse. $|f'(x_0)| = 1/h|f(x_0 + h) - f(x_0) - 1/2h^2 f''(c)| \leq \frac{2C}{h} + \frac{D}{2}h$. Donc $B = 2C$ et $A = D/2$.
3. Quel est le minimum de l'application $\mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ h \mapsto Ah + B/h$?
   Réponse. Si ϕ est la fonction, $\phi'(h) = A - B/h^2$ s'annule en $h_m = \sqrt{B/A}$, est négatif avant et positif après, donc le point critique h_m est un minimum pour ϕ et $\phi(h_m) = A\sqrt{B/A} + B\sqrt{A/B} = 2\sqrt{AB}$.
4. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq 2\max(C, D)$. En choisissant justement $h = h_m$ dans l'inégalité de la question 2, on a donc

   $$|f'(x_0)| \leq 2\sqrt{AB} = 2\sqrt{CD} \leq 2\sqrt{\max(C,D)^2} \leq 2\max(C, D).$$

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ (on rappelle que $0! = 1$). Montrer que P n'a que des racines simples.
Réponse. Si x est une racine double, elle annule P' ainsi que P. En calculant $P' - P = X^n/n!$, on voit qu'alors $x^n/n!$ est nul, ce qui implique $x = 0$. Mais $P(0) = 1$ donc il n'y a aucune racine qui n'est pas simple.

Exercice 4. Pour tout $n \geq 1$, déterminer R_n le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^n - 1$ par $(X-1)(X-2)$.

Réponse. On a : $X^n - 1 = Q(X-1)(X-2) + aX + b$ car le reste est de degré inférieur strictement à 2. D'où $1^n - 1 = a + b$ en faisant $x = 1$ et $2^n - 1 = 2a + b$ avec $x = 2$. Soit $a = -b = 2^n - 1$ et $R = (2^n - 1)(x - 1)$.

Exercice 5. Soit B un polynôme réel de degré 3, et $\phi : \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par $\forall P \in \mathbb{R}_5[X]$, $\phi(P) =$ le reste de la division euclidienne de P par B.

1. Montrer que ϕ est à valeurs dans $\mathbb{R}_5[X]$.
   Réponse. Le reste est de degré inférieur strictement au degré de B donc est de degré au plus 2. C'est dans $\mathbb{R}_5[X]$ et même dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que ϕ est une application linéaire.
   Réponse. Si $P_i = Q_i B + \phi(P_i)$ pour $i = 1, 2$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P_1 + \lambda P_2 = (Q_1 + \lambda Q_2)B + \phi(P_1) + \lambda\phi(P_2)$. Or $\phi(P_1) + \lambda\phi(P_2)$ est dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc par unicité du reste de la division de $P_1 + \lambda P_2$ par B, on a nécessaireement $\phi(P_1 + \lambda P_2) = \phi(P_1) + \lambda\phi(P_2)$ et donc ϕ est linéaire.
3. Montrer que $\phi^2 = \phi$.
   Réponse. Pour tout P on a $\phi(P) = 0.B + \phi(P)$ donc par unicité de la division de $\phi(P)$ par B, le reste est $\phi(\phi(P)) = \phi(P)$.
4. Quel est le noyau de ϕ ? Calculer sa dimension.
   $\phi(P)$ est nul si P est divisible par B. Donc $P = QB$ mais avec $deg(Q) \leq 2$ car $P \in \mathbb{R}_5[X]$. Réciproquement, tous les QB avec $B \in \mathbb{R}_2[X]$ sont dans le noyau de ϕ. Au total, $Ker\phi = B\mathbb{R}_2[X]$ et sa dimension est celle de $\mathbb{R}_2[X]$ soit 3.
5. Quelle est l'image de ϕ ? Calculer sa dimension.
   Réponse. ϕ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\phi(P) = P$ si $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Donc $Im(\phi) = \mathbb{R}_2[X]$ et c'est de dimension 3.