

---

## Fondamentaux des mathématiques I-DS4

### Partie commune (1h30)

---

- L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.
- L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil (téléphone portable, grille-pain,...) est prohibé.

#### Question de cours

1. Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  ou  $\mathbb{R}[X]$  et  $a$  un élément de  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ . L'élément  $a$  est racine au moins double (deuxième) de  $P$  si et seulement si  $a$  est racine de  $P$  et de  $P'$ .
2. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers. Montrer que  $c$  est un diviseur de  $a$  et  $b$  si et seulement si  $c$  divise  $d = \text{pgcd}(a, b)$

#### Exercice 1.

1. Calculer le  $\text{pgcd}$  de 225 et de 123.
2. Donner  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $225u + 123v = \text{pgcd}(225, 123)$ .
3. En déduire une solution particulière de  $75x + 41y = 20$
4. Déterminer l'ensemble des solutions pour  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  de  $75x + 41y = 20$
5. Donner l'ensemble des solutions pour  $n \in \mathbb{Z}$  du système
$$\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{41} \\ n \equiv 33 \pmod{75} \end{cases}$$

Exercice 2. Soit  $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$  et soit  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que  $P$  admet deux racines réelles évidentes.
2. Montrer que  $j$  est une racine double de  $P(X)$ .
3. En déduire la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  (en faisant attention au degré de  $P$ ), puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

#### Exercice 3.

Soit  $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$

On pose  $Y = X + \frac{1}{X}$

1. Montrer que le polynôme  $Q(Y) = 2Y^2 + 3Y - 5$ , vérifie  $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$ .
2. Calculer les racines de  $Q$ .
3. En déduire les racines de  $P$ , puis la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

#### Exercice 4.

1. Donner, en le justifiant, le nombre de diviseurs positifs de  $100^{100}$ .
2. Déterminer le reste de la division de  $101^{101}$  par 3, et par 5.

3. En déduire le reste de la division euclidienne de  $101^{101}$  par 15.