

## Correction de la partie algébre du DS 4 commun

### Exercice 3

$$1) A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$t_A \times A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3$$

A est donc orthogonale. Or A est la matrice de u dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  qui est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique donc u est orthogonal.

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$2) \det(A) = \frac{1}{3^3} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ = \frac{1}{9} \times \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

u est donc une rotation.

L'autre de rotation sur  $E_1 = \ker(u - I_d)$ . Calculons  $E_1(A) = \ker(A - I_3)$

$$E_1(A) = \ker \left( \frac{1}{3} \Pi - I_3 \right) \text{ où } \Pi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ = \ker \left( \frac{1}{3} (\Pi - 3I_3) \right) = \ker(\Pi - 3I_3) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ = \ker \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}. \text{ Dans cette matrice, } C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -3C_2$$

$$\text{donc } C_1 + 3C_2 - C_3 = 0 \text{ et donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1(A).$$

Or cette matrice est de rang 2 donc  $\dim E_1(A) = 1$  et donc

$$E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ce qui donne } E_1(u) = \text{Vect} \left\{ (1, 3, -1) \right\}.$$

Si on note  $\theta$  l'angle de la rotation, on sait que  $1 + 2 \cos(\theta) = \text{tr}(A)$

$$\text{d'où } 1 + 2 \cos \theta = -\frac{2}{3} \text{ et } \cos(\theta) = -\frac{5}{6}.$$

### Exercice 4

1) Cette question a été vue en TD.

2) Montrons que  $\frac{\sin(\hat{A})}{\|a\|} = \frac{\sin(\hat{B})}{\|b\|}$ , l'autre égalité s'obtient par les mêmes arguments.

$$\det(c \quad -b) = \|c\| \| -b \| \sin(\hat{A}) \text{ et } \det(a \quad -c) = \|a\| \| -c \| \sin(\hat{B}) \\ = \|c\| \|b\| \sin(\hat{A}) = \|c\| \|a\| \sin(\hat{B})$$

D'autre part,  $a = -b - c$  donc  $\det(a \quad -c) = \det(-b - c \quad -c)$

$$= \det(-b \ -c) + \underbrace{\det(-c \ -c)}_{=0 \text{ car deux colonnes liées}} \quad (\text{par linéarité par rapport à la 1ère colonne}).$$

$$= -\det(-b \ c)$$

$$= \det(c \ -b).$$

Ainsi  $\|c\| \|b\| \sin(\hat{A}) = \|c\| \|a\| \sin(\hat{B})$

$$\text{d'où} \quad \frac{\sin(\hat{A})}{\|a\|} = \frac{\sin(\hat{B})}{\|b\|}$$

### Exercice 5

1) Voir le TD (ex. 3 fiche 5)

2) Soit  $\lambda \in \text{Spec}(f)$  et soit  $x \in E \setminus \{0\}$  t.q.  $f(x) = a \wedge x = \lambda x$   
Alors  $\forall z \in E$ ,  $\langle \lambda x, z \rangle = \det(a \ x \ z)$

En particulier,  $\langle \lambda x, x \rangle = \det(a \ x \ x) = 0$  (deux colonnes égales)  
ie  $\lambda \langle x, x \rangle = 0$  or  $\|x\|^2 \neq 0$  donc  $\lambda = 0$ .

Ainsi  $\text{Spec}(f) \subseteq \{0\}$ .

• Soit  $x \in E_0$ . Alors  $f(x) = 0$  ie  $a \wedge x = 0$ .

Par conséquent,  $\forall z \in E$ ,  $0 = \langle a \wedge x, z \rangle = \det(a \ x \ z)$ .

Si  $x$  n'est pas colinéaire à  $a$  alors la famille libre  $(a, x)$  peut être complétée en une base  $(a, x, z)$  ce qui donne  $\det(a \ x \ z) \neq 0$  ce qui est absurde. Ainsi  $x$  est colinéaire à  $a$  ie  $x \in \text{Vect}\{a\}$ .

• Réciproquement :  $f(a) = a \wedge a$  et  $\forall z$ ,  $\langle a \wedge a, z \rangle = \det(a \ a \ z) = 0$

d'où  $a \wedge a = 0$  et donc  $a \in E_0$ .

Par conséquent  $\text{Vect}\{a\} \subseteq E_0$ .

3) Pour  $x_1, x_2 \in E$ ,  $\langle x_1 \wedge x_2, x_1 \rangle = \det(x_1 \ x_2 \ x_1) = 0$   
et  $\langle x_1 \wedge x_2, x_2 \rangle = \det(x_1 \ x_2 \ x_2) = 0$   
d'où  $x_1 \wedge x_2 \in (\text{Vect}\{x_1, x_2\})^\perp$ .

•  $f(b_1) = a \wedge a = 0$  (voir question 2)

•  $f(b_2) = b_1 \wedge b_2$ . On sait que  $b_1 \wedge b_2 \in (\text{Vect}\{b_1, b_2\})^\perp = \text{Vect}\{b_3\}$

Ainsi  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  t.q.  $b_1 \wedge b_2 = \lambda b_3$

Or plus  $\langle b_1 \wedge b_2, b_3 \rangle = \det(b_1 \ b_2 \ b_3) = 1$   
(car base orthon. directe)

i.e.  $\langle \lambda b_3, b_3 \rangle = 1$  d'où  $\lambda = 1$  et  $f(b_3) = b_3$

•  $f(b_3) = b_1 \wedge b_3$ . Comme précédemment,  $b_1 \wedge b_3 \in \text{Vect}\{b_2\}$   
donc  $\exists \beta \in \mathbb{R}$  t.q.  $b_1 \wedge b_3 = \beta \cdot b_2$

On a :  $\langle \beta b_2, b_2 \rangle = \langle b_1 \wedge b_3, b_2 \rangle = \det(b_1 \ b_3 \ b_2)$   
 $= -\det(b_1 \ b_2 \ b_3)$   
 $= -1$

D'où  $\beta \langle b_2, b_2 \rangle = -1$

et  $\beta = -1$  et  $f(b_3) = -b_2$

On obtient la matrice demandée :

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}^3}(f) = \begin{bmatrix} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$$