
Partie commune - Devoir numéro 4 - Corrigé

Exercice 1. Déterminer la nature (convergence ou divergence) des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} dx, \quad B = \int_0^{1/2} \frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

La fonction $x \mapsto \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$ et donc A est généralisée en $+\infty$. Soit $t > 0$. Comme $(e^{\arctan(x)})' = \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}$, on a

$$\int_0^t \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} dx = \left[e^{\arctan(x)} \right]_0^t = e^{\arctan(t)} - 1$$

et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{\arctan(t)} - 1) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$, on conclut que A est convergente et vaut $e^{\frac{\pi}{2}} - 1$.

La fonction $x \mapsto f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}}$ est bien définie et continue sur $]0, \frac{1}{2}]$ et donc B est généralisée en 0. Par ailleurs f est positive. On cherche un équivalent de f en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}e^x}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sqrt{1-x}} = 1$$

et donc

$$\frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente. Donc, par le critère des équivalents, B est convergente.

Exercice 2. Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + 3y + 2z, 2x + z).$$

Donner une base de $\text{Ker}(f)$. Indiquer la dimension de $\text{Im}(f)$.

On a $(x, y, z) \in \text{Ker}(f)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 0y + z = 0 \end{cases}$$

En utilisant l'algorithme de Gauss, on voit que ce système est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Donc, $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ et } z = -2y\} = \{(y, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, -2))$. Ainsi, $\{(1, 1, -2)\}$ est une base de $\text{Ker}(f)$, puisque c'est un ensemble générateur avec un seul vecteur, non nul.

Le théorème du rang nous dit que $\dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim(\mathbb{R}^3)$. On en déduit que $\dim \text{Im}(f) = 3 - 1 = 2$.

Exercice 3. On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies, pour tout $n \geq 1$, par

$$u_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t} dt, \quad v_n = \int_1^n e^{-t} (1+t) dt.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \int_1^{n+1} e^{-t} \sqrt{1+t} dt - \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t} dt = \int_n^{n+1} e^{-t} \sqrt{1+t} dt \geq 0$$

car $e^{-t} \sqrt{1+t}$ est positive et donc son intégrale est positive. D'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$.

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $2t \geq t$, $t^2 \geq 0$ et

$$(1+t)^2 = 1 + 2t + t^2 \geq 1+t.$$

D'où pour tout $t \in [0, +\infty[$, $(1+t) \geq \sqrt{1+t}$. Comme $e^{-t} > 0$, on a $e^{-t}(1+t) \geq e^{-t}\sqrt{1+t}$. En intégrant sur l'intervalle $[1, n]$, on obtient

$$\int_1^n e^{-t}(1+t) dt \geq \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t} dt$$

ce qui donne $v_n \geq u_n$.

3. Calculer v_n en fonction de n .

En appliquant une intégration par parties ($u(t) = -e^{-t}$, $v(t) = 1+t$; u et v sont de classe C^1)

$$\int_1^n e^{-t}(1+t) dt = \left[-e^{-t}(1+t) \right]_1^n + \int_1^n e^{-t} dt = \left[-e^{-t}(1+t) - e^{-t} \right]_1^n = 3e^{-1} - e^{-n}(2+n)$$

et donc

$$v_n = 3e^{-1} - e^{-n}(2+n).$$

4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.

D'après la question 1, $u_n \leq v_n$ et donc, en utilisant la question précédente, pour tout $n \geq 1$

$$u_n \leq 3e^{-1} - e^{-n}(2+n).$$

Or $-e^{-n}(2+n) \leq 0$ et donc $3e^{-1} - e^{-n}(2+n) \leq 3e^{-1}$. On conclut donc $u_n \leq 3e^{-1}$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.

5. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante et majorée, elle est convergente.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , et les sous-espaces vectoriels $S = \text{Vect}((2, 1, 0), (3, 0, -1))$, $T = \{(x, y, z) : x + y = 0\}$, $U = \{(x, y, z) : 2x + y + z = 0\}$.

1. Donner des bases de S , T et U , puis indiquer leurs dimensions.

La matrice associée aux vecteurs $(2, 1, 0), (3, 0, -1)$ est échelonnée, donc ils forment une famille libre. Puisqu'ils engendrent S , ils en font une base. En particulier, $\dim S = 2$.

On a $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y\} = \{(-y, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, 0), (0, 0, 1))$. Les vecteurs $(-1, 1, 0), (0, 0, 1)$ forment une matrice échelonnée. Donc, $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est une base de T , et sa dimension est 2.

Par la même méthode, $U = \{(x, y, -2x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, -2) + y(0, 1, -1) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -2), (0, 1, -1))$. Les vecteurs $(1, 0, -2), (0, 1, -1)$ forment une famille libre et génératrice du sous-espace U , donc ils en font une base. On a $\dim U = 2$.

2. Déterminer $S \cap T$ et sa dimension.

Si $v \in S \cap T$, alors, d'une part, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = a(2, 1, 0) + b(3, 0, -1) = (2a + 3b, a, -b).$$

D'autre part, par l'équation définissant T , on a

$$(2a + 3b) + a = 0,$$

ce qui donne $a = -b$. Donc, v doit être de la forme $(-a, a, a)$. Réciproquement, par les mêmes calculs, on voit que tout vecteur de cette forme appartient à $S \cap T$. On en déduit que $S \cap T$ est le sous-espace engendré par $(-1, 1, 1)$. En particulier, sa dimension est 1.

3. En déduire, sans calcul, le sous-espace $S + T$.

Par la formule de Grassmann, $\dim S + \dim T = \dim(S + T) + \dim(S \cap T)$, d'où $\dim(S + T) = 3$. C'est-à-dire, $S + T$ est un sous-espace de \mathbb{R}^3 de dimension 3, et donc $S + T = \mathbb{R}^3$.

4. Montrer que $S \cap T$ est contenu dans U .

Comme le sous-espace $S \cap T$ est engendré par $(-1, 1, 1)$, il suffit de montrer que $(-1, 1, 1)$ appartient à U . Or, si $(x, y, z) = (-1, 1, 1)$, on a bien $2x + y + z = -2 + 1 + 1 = 0$, ce qui montre que $(-1, 1, 1) \in U$.

5. Déterminer un sous-espace V tel que $(S \cap T) \oplus V = \mathbb{R}^3$.

On complète la famille $\{(-1, 1, 1)\}$ en une base de \mathbb{R}^3 . Si on pose $u = (-1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 0)$, $w = (0, 0, 1)$, on voit bien que la matrice associée à ces trois vecteurs est échelonnée, et donc que $\{u, v, w\}$ est une base de \mathbb{R}^3 . On pose $V = \text{Vect}(v, w)$. Alors, la réunion de la base $\{u\}$ de $S \cap T$ et la base $\{v, w\}$ de V forme une base de \mathbb{R}^3 . Cela dit que $(S \cap T) \oplus V = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^{2\pi} \sqrt{t} \cos(xt) dt$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_0^{2\pi x} \sqrt{u} \cos(u) du$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto u(t) = xt$ est de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$. On a $du = xdt$ et

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{t} \cos(xt) dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{u(t)}{x}} \cos(u(t)) \frac{u'(t)}{x} dt.$$

Comme la fonction $t \rightarrow \sqrt{\frac{u(t)}{x}} \frac{\cos(u(t))}{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et comme $u([0, 2\pi]) = [0, 2\pi x] \subseteq [0, +\infty[$, on peut appliquer le changement de variable $u = u(t)$ et on obtient donc

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_0^{2\pi} \sqrt{u(t)} \cos(u(t)) u'(t) dt = \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_0^{2\pi x} \sqrt{u} \cos(u) du.$$

2. *Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.*

Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $u \mapsto \sqrt{u} \cos(u)$ étant continue sur $[0, +\infty[$, elle admet une primitive F sur cet intervalle. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} (F(2\pi x) - F(0)).$$

Donc f est le produit de fonctions dérivables et donc elle est dérivable.

Comme F est la primitive de $\sqrt{u} \cos(u)$ on a $F'(u) = \sqrt{u} \cos(u)$ et donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)' (F(2\pi x) - F(0)) + \frac{1}{x\sqrt{x}} 2\pi \sqrt{2\pi x} \cos(2\pi x) \\ &= \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}} (F(2\pi x) - F(0)) + \frac{1}{x} 2\pi \sqrt{2\pi} \cos(2\pi x) \\ &= \frac{-3}{2x} f(x) + \frac{1}{x} 2\pi \sqrt{2\pi} \cos(2\pi x) \\ &= \frac{1}{2x} (4\pi \sqrt{2\pi} \cos(2\pi x) - 3f(x)). \end{aligned}$$