Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Math III - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Exercice 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On définit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ de la manière suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = (X^3 - 1)P^{(3)} + 4X^2 P''.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ (on donnera au moins proprement les 4 premières colonnes de la matrice, sa forme générale, et une expression explicite de $u(X^k)$ pour $k \in [\![0; n]\!]$).
2. Déterminer le spectre de u.
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 2. Soient a et b deux réels non nuls vérifiant $a \neq -b$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -a & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de $A - (a-b)I_4$. En déduire que le polynôme caractéristique de A est divisible par un polynôme de degré 2 que l'on explicitera.
2. En distinguant les cas $a = b$ et $a \neq b$, étudier la diagonalisabilité de la matrice A dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
3. Dans cette question, on suppose que $a = 1$ et $b = 2$. Diagonaliser la matrice A (on précisera une matrice de passage et le lien avec la matrice diagonale).
4. Expliciter, en fonction des valeurs de a et b, le polynôme minimal de A.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{3n+1} x^{3n+1} + \frac{1}{3n+2} x^{3n+2} \right).$$

1. (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $|f_n(x_0)|$.
   (b) Déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0; 1]$.
3. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ la fonction somme de cette série de fonctions. Montrer que S est continue sur $[0; 1]$.
4. Soit $x \in]0; 1[$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^x t^{3n}(1+t)\,dt$.
   (b) En déduire une expression explicite de $S(x)$ pour $x \in]0; 1[$.
   On pourra utiliser sans le prouver que la fonction $t \longmapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{(2t-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *est une primitive de la fonction* $t \longmapsto \frac{1}{1-t+t^2}$ *sur* $\mathbb{R}^+$.
5. Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$.

Correction du Devoir Surveillé 4 - Partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Par calculs, $f(1)=0$, $f(X)=0$, $f\left(X^2\right)=8X^2$ puis pour $k \geq 3$ entier :

$$\begin{aligned} f\left(X^k\right) &= \left(X^3-1\right)k(k-1)(k-2)X^{k-3}+4X^2k(k-1)X^{k-2} \\ &= (k(k-1)(k-2)+4k(k-1))\,X^k-k(k-1)(k-2)X^{k-3} \\ &= k(k+2)(k-1)X^k-k(k-1)(k-2)X^{k-3} \end{aligned}$$

Ainsi la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ a ses deux première colonnes nulles, la troisième colonne est nulle à l'exception de la troisième ligne qui vaut 8. Pour une colonne $k \in \{3,\ldots,n\}$, le coefficient en ligne k vaut $k(k+2)(k-1)$ et le coefficient en ligne $k-3$ vaut $-k(k-1)(k-2)$, et la matrice est triangulaire supérieure.

2. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. L'ensemble des valeurs propres de f est :

$$\mathrm{Sp}(f)=\{0\}\cup\{k(k+2)(k-1),\ k\in\{2,\ldots,n\}\}$$

3. Un calcul de dérivée montre que la fonction $x \longmapsto x(x+2)(x-1)$ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. En particulier, l'ensemble $\{k(k+2)(k-1),\ k\in\{2,\ldots,n\}\}$ contient $n-1$ éléments. Ainsi l'endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes.

De plus, $1\in\mathrm{Ker}(f)$ et $X\in\mathrm{Ker}(f)$, donc $\mathrm{Vect}(1,X)\subset\mathrm{Ker}(f)$, ce qui montre que $\dim(\mathrm{Ker}(f))\geq 2$ puisque la famille $(1,X)$ est libre. Puis, pour tout $k\in\{2,\ldots,n\}$, on a par le cours

$$\dim E_{k(k+2)(k-1)}(f)=\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f-k(k+2)(k-1)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)\right)\geq 1.$$

Ainsi

$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}E_\lambda(f)\right)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\dim\mathrm{Ker}\left(f-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)\geq n+1=\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right)$$

ce qui démontre que $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}E_\lambda(f)=\mathbb{R}_n[X]$ donc l'endomorphisme f est diagonalisable.

Correction de l'exercice 2

1. Comme $b\neq 0$, les deux premières colonnes de $A-(a-b)I_4$ sont linéairement indépendantes. Puis, on a $C_3=-\dfrac{b}{a}C_2$ et $C_4=C_1$, donc :

$$\mathrm{rang}(A-(a-b)I_4)=\mathrm{rang}\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & b \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & b \end{pmatrix}=2$$

Le théorème du rang montre $\dim(\mathrm{Ker}(A-(a-b)I_4))=4-2=2$. Par conséquent, $a-b$ est valeur propre de la matrice A, de multiplicité algébrique au moins 2. Autrement dit, $(X-(a-b))^2$ divise le polynôme caractéristique de A.

2. On peut facilement voir que 0 est valeur propre de A (car $\mathrm{rang}(A)\leq 3$), mais comme $a-b$ peut être nul, on ne peut pas dire que $X(X-(a-b))^2$ divise χ_A et ensuite utiliser la trace de A pour trouver la dernière valeur propre manquante. En effectuant les opérations $C_1\leftarrow C_1+C_4$ et $C_2\leftarrow C_2+C_3$ puis $L_3\leftarrow L_3-L_2$ et $L_4\leftarrow L_4-L_1$, on trouve

$$\chi_A=\begin{vmatrix} X-(a+b) & 0 & 0 & -b \\ 0 & X & a & 0 \\ 0 & X & X+b & 0 \\ X-(a+b) & 0 & 0 & X-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} X-(a+b) & 0 & 0 & -b \\ 0 & X & a & 0 \\ 0 & 0 & X+b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X-a+b \end{vmatrix}=X(X-(a+b))(X-(a-b))^2.$$

Finalement, le spectre de A est $\{a-b; 0; a+b\}$ avec $0 \neq a+b$. Pour décider si la matrice A est diagonalisable, on distingue des cas selon si $a-b=0$ ou non.

- Si $a=b$, alors la matrice A a deux valeurs propres distinctes : 0 (de multiplicité algébrique $m_0(A)=3$) et $2a$ (de multiplicité algébrique 1). Comme $\operatorname{rang}(A)=2$, le théorème du rang donne $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 2 \neq m_0(A)$, donc A n'est pas diagonalisable.
- Si $a \neq b$, on a vu que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et que la matrice A a trois valeurs propres distinctes : $a-b$ (de multiplicité algébrique 2), 0 et $a+b$ toutes deux de multiplicité algébrique égale à 1. Pour $\lambda \in \{0; a+b\}$, on sait que $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda(A) = 1$, d'où $\dim E_\lambda(A) = 1 = m_\lambda(A)$. De plus, on a vu que $\dim E_{a-b}(A) = 2 = m_{a-b}(A)$, donc la matrice A est diagonalisable.

3. Comme $a \neq b$, la matrice A a trois valeurs propres distinctes : -1, 0 et 3 et on a vu que A est diagonalisable. Comme $\dim E_0(A) = 2$, pour en trouver une base, il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires appartenant à $\operatorname{Ker}(A+I_4)$. Comme dans la matrice

$$A + I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on voit que $C1 = C_4$ et $C_2 = -2C_3$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A+I_4)$ appartiennent à $\operatorname{Ker}(A+I_4)$ et sont non colinéaires, donc ils forment une base de $\operatorname{Ker}(A+I_4)$. De même, pour $\lambda \in \{-1; 3\}$, $\dim E_\lambda(A) = 1$ donc il suffit de trouver un vecteur non nul dans $E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_4)$ pour obtenir une base de ce sous-espace. On voit dans la matrice A que $C_2 = -C_3$, donc $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}(A)$. On trouve de même qu'une base de $\operatorname{Ker}(A - 3I_4)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Comme la matrice A est diagonalisable, la concaténation

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ des bases des sous-espaces propres de A forme une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres de A, la formule de changement de base donne $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(-1, -1, 0, 3)$.

4. Par le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal de A divise le polynôme caractéristique χ_A. De plus, π_A est unitaire et possède les mêmes racines que χ_A (à savoir les éléments de $\operatorname{Sp}(A)$). Ensuite, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. On distingue deux cas.

- Si $a=b$, alors la matrice A a deux valeurs propres distinctes : 0 et $2a$ et $\chi_A = X^3(X-2a)$. Comme A n'est pas diagonalisable, π_A n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\pi_A = X^2(X-2a)$ ou $X^3(X-2a)$. Comme π_A est le polynôme unitaire annulateur de A de plus petit degré, on teste si $X^2(X-2a)$ est annulateur de A. Puisque

$$A^2(A - 2aI_4) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & a & -a & 0 \\ 0 & a & -a & 0 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & a \\ 0 & -a & -a & 0 \\ 0 & a & -3a & 0 \\ a & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$$

le polynôme minimal de A est $\pi_A = X^2(X-2a)$.

- Si $a \neq b$, alors la matrice A a trois valeurs propres distinctes : 0, $a-b$ et $a+b$, $\chi_A = X^2(X-(a-b))(X-(a+b)$ et A est diagonalisable, donc π_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et nécessairement $\pi_A = X(X-(a-b)(X-(a+b))$.

Correction de l'exercice 3

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x_0)| = \dfrac{1}{3n+1}x_0^{3n+1} + \dfrac{1}{3n+2}x_0^{3n+2}$ car $x_0 \geq 0$. On distingue alors les cas selon la position de x_0 par rapport à 1. Si $x_0 < 1$, alors $x_0^{3n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{3n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (de même avec les termes en $3n+2$) donc $|f_n(x_0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x_0 = 1$, alors $|f_n(x_0)| = \dfrac{1}{3n+1} + \dfrac{1}{3n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin si $x_0 > 1$, par croissance comparée, $\dfrac{1}{3n+1}x^{3n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (de même en remplaçant $3n+1$ par $3n+2$) donc $|f_n(x_0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   (b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Si $x_0 > 1$, $|f_n(x_0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0$ donc la série numérique $\sum f_n(x_0)$ diverge grossièrement. Si $x_0 \leq 1$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n f_n(x_0) \geq 0$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est une série alternée. De plus, $|f_n(x_0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $x \leq 1$, la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, à valeurs positives, et il en est de même de la suite $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\geq 1}$, ce qui entraîne

$$|f_{n+1}(x_0)| = \frac{1}{3n+4}x^{3n+4} + \frac{1}{3n+5}x^{3n+5} \leq \frac{1}{3n+1}x^{3n+1} + \frac{1}{3n+2}x^{3n+2} = |f_n(x_0)|$$

   et démontre la décroissance de la suite $(|f_n(x_0)|)_{n\in\mathbb{N}}$. Par le critère des séries alternées, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est donc convergente. Ainsi, le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ est $[0;1]$.

2. Si la série de fonctions $\sum f_n$ convergeait normalement sur $[0;1]$, elle devrait converger absolument simplement sur $[0;1]$. Or pour $x_0 = 1$,

$$|f_n(x_0)| = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} = \frac{3n+2+(3n+1)}{(3n+1)(3n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6n}{9n^2} = \frac{2}{3}\frac{1}{n}$$

   Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente, il en est de même de la série $\sum \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{n}$ (car $2/3 \neq 0$), et par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum |f_n(x_0)|$ diverge, ce qui contredit la convergence absolue en 1. Par conséquent, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0;1]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0;1]$. Montrons que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$. On a vu que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;1]$. Soit $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Comme la série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées, celui-ci entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0;1], \quad |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{3n+4}x^{3n+4} + \frac{1}{3n+5}x^{3n+5} \leq \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+5}.$$

   Ceci démontre que la fonction R_n est bornée sur $[0;1]$ et comme la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble,

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty;[0;1]} = \sup_{x\in[0;1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+5}.$$

   Comme $\dfrac{1}{3n+4} + \dfrac{1}{3n+5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, le théorème des gendarmes implique que $\|R_n\|_{\infty;[0;1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui démontre que la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0;1]$. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$. On peut donc appliquer le théorème de continuité pour les séries de fonctions et en déduire que la fonction somme S est continue sur $[0;1]$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\int_0^x t^{3n}(1+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (t^{3n}+t^{3n+1})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3n+1}x^{3n+1} + \frac{1}{3n+2}x^{3n+2}$ (car $3n+1$ et $3n+2$ sont strictement positifs donc $0^{3n+1} = 0 = 0^{3n+2}$).

(b) Ainsi, pour tout $x \in]0;1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^{3n}(1+t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x (-1)^n t^{3n}(1+t)\,\mathrm{d}t\right).$$

On va chercher à intervertir la somme et l'intégrale. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \longmapsto (-1)^n t^{3n}(1+t)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur le segment $[0;x]$, donc elle est bornée sur ce segment par le théorème des bornes atteintes. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0;x]$, $|g_n(t)| = t^{3n} + t^{3n+1}$ donc la fonction $|g_n|$ est croissante, et atteint son maximum en x, ainsi

$$\|g_n\|_{\infty;[0;x]} = x^{3n} + x^{3n+1} = (x^3)^n(1+x).$$

Comme $|x| < 1$, $\left|x^3\right| < 1$ et la série géométrique $\sum (x^3)^n$ est convergente, ce qui prouve la convergence de la série numérique $\sum \|g_n\|_{\infty;[0;1]}$. Ainsi, la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0;1]$ donc par le théorème d'interversion série/intégrale

$$S(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{3n}(1+t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^x (1+t)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-t^3)^n\right)\mathrm{d}t = \int_0^x (1+t)\frac{1}{1-(-t^3)} = \int_0^x \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$$

car $1+t^2 = (1+t)(1-t+t^2)$. On en déduit, en utilisant la primitive fournie par l'énoncé, que

$$\forall x \in]0;1[, \quad S(x) = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{(2t-1)}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{(2x-1)}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

5. Par continuité de la fonction S en 1, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right) = S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{(2x-1)}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$