Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2014-2015

Math III - PMI — Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle**.
Les exercices sont indépendants. ***Il faut rendre les copies d'analyse et d'algèbre séparément et mettre votre copie dans la pile du bon groupe de TD !***

1 Algèbre

Exercice 1. Soit a un réel et n un entier $n \geq 2$. On considère l'endomorphisme L de $M_n(\mathbb{R})$ défini pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$ par

$$L(M) := M + \operatorname{tr}(M) I_n.$$

a) Calculer la dimension du sous-espace T de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices à trace nulle

$$T := \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(M) = 0\}.$$

b) Montrer que T est un sous-espace propre pour une certaine valeur propre à déterminer.

c) Calculer $L(I_n)$. En déduire toutes les valeurs propres de L ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

c) Déterminer les polynômes caractéristique $P_L(X)$ et minimal $m_L(X)$ de L.

d) Calculer $m_L(L)$, et en déduire une expression pour l'inverse de L.

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère la droite vectorielle V et le plan Π suivants :

$$V := \operatorname{Vect}((1,1,1)), \qquad \Pi := \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,1,-1)).$$

a) Est-ce que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus V$?

b) Rappeler la définition d'un sous-espace stable de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme f.

c) Est-ce que V est-elle stable par f ?

d) Montrer que le sous-espace Π est stable par f.

e) Les sous-espaces Π et V sont-ils des sous-espaces propres ?

f) Déterminer les polynômes caractéristique et minimal de f.

g) L'endomorphisme f est diagonalisable ? trigonalisable ?

h) En déduire des points précédents une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$, où les $*$ sont des entiers à déterminer.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathrm{End}(E)$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$.

a) Donner la définition de $P(f)$. À quel espace vectoriel appartient-il ?

b) Montrer que

$$P(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(P(f)) \\ \mathrm{Im}(P(f)) \subseteq \mathrm{Im}(f) \end{array} \right. .$$

2 Analyse

Exercice 4. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis déterminer si elles peuvent être prolongées continûment en $(0, 0)$. Utiliser éventuellement pour prouver l'existence d'une limite les coordonnées polaires.

$$1)\ (x, y) \longmapsto a(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^4}.$$
$$2)\ (x, y) \longmapsto b(x, y) = \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}.$$
$$3)\ (x, y) \longmapsto c(x, y) = \frac{(x - y)^2}{1 - \cos(x - y)}.$$
$$4)\ (x, y) \longmapsto d(x, y) = \frac{\sin(x + y)}{|x| + y^2}.$$
$$5)\ (x, y) \longmapsto f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$
$$6)\ (x, y) \longmapsto g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Exercice 5. 1) Montrer que l'ensemble

$$O = \{(x, y) \in R^2,\ x \neq 0\}$$

est ouvert.

2) Déterminer l'ensemble des points de continuité de la fonction h :

$$(x, y) \longmapsto h(x, y) = \left\{ \begin{array}{cc} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ y^2/x & \text{sinon} \end{array} \right.$$