Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2012-2013

Math III - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Notations et rappels

Dans tout le problème, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$ et n désigne un entier naturel.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On note Id_E l'identité de E. On rappelle que $u^0 = \mathrm{Id}_E$, $u^1 = u$, $u^2 = u \circ u$ etc.
- On dit que u est nilpotent s'il existe un entier naturel k tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On définit alors son indice de nilpotence par $\alpha(u) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$. On a donc $\alpha(u) \geq 1$.

On rappelle qu'il est possible de démontrer que si E est de dimension finie, $\alpha(u) \leq \dim(E)$.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Étant donné un entier naturel p non nul, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre p. On note I_p la matrice identité.

On définit de même que ci-dessus la notion de matrice nilpotente et l'indice d'une matrice nilpotente.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels à une indéterminée. Dans la suite, le mot *polynôme* désignera toujours un élément de $\mathbb{R}[X]$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$.

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. On note $\mathcal{C} = (X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}_n = (X^k)_{0\leq k\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I :

On considère

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \quad \text{et} \quad D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}.$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.
3. On note Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ. Expliciter la matrice de Δ_n relativement à la base $\mathcal{C}_n$.
4. L'endomorphisme Δ_n est-il diagonalisable ?
5. L'endomorphisme Δ_n est-il nilpotent ?
6. L'endomorphisme Δ est-il nilpotent ?
7. (a) $\mathbb{R}_n[X]$ est-il stable par D ? On note D_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par D. Montrer que le polynôme X^{n+1} est annulateur de D_n mais que pour tout $0 \leq k \leq n$, le polynôme X^k n'est pas annulateur de D_n.

   (b) En déduire le polynôme minimal de D_n.

Partie II :

8. On note A et B les matrices respectives de D_2 et Δ_2 dans la base canonique $\mathcal{C}_2 = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer A^k et B^k.
9. On considère la matrice
$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On note (E_1) l'équation matricielle $M^2 = J_1$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Donner explicitement deux solutions distinctes de (E_1).
10. Soit M une solution de (E_1). On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à M. Soit $g = f \circ f$.
    (a) i. Montrer que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.
        ii. Déterminer explicitement $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ (on rappelle que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$).
    (b) À l'aide de la question 10a, montrer que M est triangulaire supérieure.
    (c) i. Montrer que f admet une unique valeur propre, que l'on précisera.
        ii. En déduire les termes diagonaux de M.
    (d) En procédant par analyse-synthèse, déterminer toutes les solutions de (E_1).
11. On considère la matrice
$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
    (a) Calculer J_2^2, J_2^3.
    (b) On note (E_2) l'équation matricielle $M^2 = J_2$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
    Montrer que (E_2) n'admet aucune solution.

Partie III :

12. Déterminer le polynôme minimal de J_2. La matrice J_2 est-elle diagonalisable ?
13. Existe-t-il une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont le polynôme minimal est $X^2 + 1$?
14. Démontrer l'existence d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $X^2 + 1$?
15. Existe-t-il une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont le polynôme minimal est $X^2 + 1$?
16. (a) Quel est le degré du polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
    (b) Montrer qu'il n'existe aucune matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $X^2 + 1$?

Correction du Devoir Surveillé 4 - partie CCP

Partie I :

1. Montrons que Δ est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $\Delta(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)(X+1) - (\lambda P+Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) = \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)$, donc Δ est linéaire. De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\Delta(P) \in \mathbb{R}[X]$ aussi. Ainsi Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors le degré de P est inférieur ou égal à n donc le polynôme $P(X+1)$ est aussi de degré inférieur ou égal à n (il est de même degré que P), donc $P(X+1) - P(X)$ est aussi de degré inférieur ou égal à n. Par conséquent, $\mathbb{R}_n[X]$ est donc stable par Δ.

3. On note Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ. Afin d'expliciter la matrice de Δ_n dans la base $\mathcal{C}_n$, on exprime, pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$, $\Delta_n(X^j) = \Delta(X^j)$ dans la base $\mathcal{C}_n$. On a $\Delta(1) = 1 - 1 = 0$ et pour $j \in [\![1, n]\!]$:
$$\Delta(X^j) = (X+1)^j - X^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} X^k - X^j = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} X^k.$$
Ainsi, la matrice de Δ_n dans $\mathcal{C}_n$ est donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_n}(\Delta_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 2 & & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice précédente étant triangulaire, le spectre de Δ_n se lit sur la diagonale : il est réduit à $\{0\}$. Si Δ_n était diagonalisable, il existerait une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de Δ_n serait la matrice nulle, c'est-à-dire $\Delta_n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$. Or Δ_n est non nulle (en effet, $\Delta_n(X) = 1 \neq 0$), donc Δ_n n'est pas diagonalisable.

5. Le polynôme caractéristique de Δ_n est $P_{\Delta_n} = (-1)^{n+1}X^{n+1}$. Puisque le polynôme caractéristique est annulateur de Δ_n (d'après Cayley-Hamilton), on en déduit que $\Delta_n^{n+1} = 0$. Ainsi, Δ_n est nilpotent.

6. Supposons par l'absurde que Δ est nilpotent, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Delta^p = 0$. Si P est de degré d, $\Delta(P)$ est de degré $\deg(P) - 1$. En effet, si $P = a_dX^d + \dots + a_1X + a_0$, on a $\Delta(P) = a_d(X+1)^d + a_{d-1}(X+1)^{d-1} + \dots + a_0 - a_dX^d - a_{d-1}X^{d-1} - \dots - a_0$. Le coefficient de X^d est $a_d - a_d = 0$ et celui de X^{d-1} vaut $da_d + a_{d-1} - a_{d-1} = da_d \neq 0$. Ainsi, $\Delta^p(X^p)$ est un polynôme de degré $p - p = 0$ non nul (car il vaut $p!$) ce qui est absurde. L'endomorphisme Δ n'est donc pas nilpotent.

7. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Puisque le degré du polynôme dérivé P' est strictement inférieur à celui de P, $D(P)$ appartient aussi à $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D.

   On note D_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par D. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $\deg(D(P)) < \deg(P)$, on a par récurrence immédiate $\deg(D_n^{n+1}(P)) < \deg(P) - n < 0$. Par conséquent, $D_n^{n+1}(P)$ est un polynôme de degré négatif, c'est donc le polynôme nul. Ainsi, D_n^{n+1} est l'endomorphisme nul, donc X^{n+1} est annulateur de D_n.

   Soit $0 \leq k \leq n$, on a $D_n^k(X^k) = k! \neq 0$ donc D_n^k n'est pas nul, ainsi, X^k n'est pas annulateur de D_n.

   (b) Puisque le polynôme minimal de D_n est le plus petit polynôme unitaire annulateur de D_n, on en déduit directement que X^{n+1} est le polynôme minimal de D_n.

Partie II :

8. D'après l'étude précédente, on a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car $D_2(1) = 0$, $D_2(X) = 1$ et $D_2(X^2) = 2X$.

De plus, on a $A^0 = B^0 = I_3$ $A^2 = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^k = B^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ pour tout $k \geq 1$.

9. D'après le calcul de la question précédente, les matrices $\dfrac{1}{\sqrt{2}}A$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}B$ sont deux solutions distinctes de l'équation (E_1).

10. Soit M une solution de (E_1). On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à M. Soit $g = f \circ f$.

    (a) i. Soit $x \in \operatorname{Ker}(g)$, on a alors

    $$g(f(x)) = ((f \circ f) \circ f)(x) = (f \circ (f \circ f))(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$$

    donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(g)$, et $\operatorname{Ker}(g)$ est donc bien stable par f.

    Soit maintenant $y \in \operatorname{Im}(g)$. Il existe alors $x \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $y = g(x)$. On a alors

    $$f(y) = f((f \circ f)(x)) = (f \circ f)(f(x)) = g(f(x))$$

    donc $f(y) \in \operatorname{Im}(g)$. Ainsi, l'image de g est stable par f.

    ii. La matrice de $g = f \circ f$ dans la base $\mathcal{C}_2$ est $M^2 = J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On voit donc directement sur la matrice que $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Vect}\{1, X\}$ et que l'image de g est $\operatorname{Vect}\{1\}$.

    (b) On a vu que $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Vect}\{1\}$ est stable par f donc $f(1) \in \operatorname{Vect}\{1\}$. De plus, $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Vect}\{1, X\}$ est stable par f, donc $f(X)$ appartient à $\operatorname{Vect}\{1, X\}$. Par suite, la matrice de f dans la base $\mathcal{C}^2$ est de la forme

    $$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

    (c) i. Si λ est une valeur propre de f, on considère un vecteur propre x ($x \neq 0$ par définition) associé à λ. Alors $g(x) = f(f(x)) = \lambda^2 x$, donc λ^2 est une valeur propre de g donc de J_1. Par suite, $\lambda^2 = 0$ d'où $\lambda = 0$. Réciproquement, f n'est pas bijective sinon $g = f \circ f$ le serait mais $\operatorname{Ker}(g) \neq \{0\}$. Ainsi, f n'est pas injective, donc 0 est une valeur propre de f. Le spectre de f est donc réduit à $\{0\}$.

    ii. Les termes diagonaux de M sont les valeurs propres de M (car la matrice est triangulaire), donc de f. Puisque 0 est la seule valeur propre de f, on en déduit que les termes diagonaux de M sont tous nuls.

    (d) • *Analyse* : Soit M une solution de (E_1), alors d'après les questions précédentes, M est de la forme

    $$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

De plus, $M^2 = J_1$, on en déduit donc

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $ac = 1$ (en particulier $a \neq 0$ et $c \neq 0$).

- *Synthèse* : Une matrice M de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ vérifie $M^2 = J_1$.

On en déduit donc que les solutions de (E_1) sont exactement les matrices $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

11. (a) On a

$$J_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_1 \quad \text{et} \quad J_2^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

(b) On note (E_2) l'équation matricielle $M^2 = J_2$. Supposons que M soit une solution de (E_2) alors $M^2 = J_2$, $M^4 = J_2^2 \neq 0$ et $M^6 = J_2^3 = 0$. Par suite, M est nilpotente d'indice de nilpotence inférieur ou égal à 6 mais supérieur ou égal à 5 puisque $M^4 \neq 0$. Or puisque $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, son indice de nilpotence doit être inférieur ou égal à 3, ce qui est absurde. Par conséquent, l'équation (E_2) n'a pas de solution.

Partie III :

12. La matrice J_2 est triangulaire supérieure, donc son polynôme caractéristique est $P = -X^3$. Puisque son polynôme minimal m divise P, est unitaire, et possède exactement les mêmes racines que P, on en déduit que $m = X$, X^2 ou X^3. Or m est par définition le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule J_2. Puisque $J_2 \neq 0$, $m \neq X$. En outre, $J_2^2 = J_1 \neq 0$ donc $m \neq X^2$. On conclut donc que le polynôme minimal de J_2 est $m = X^3$.

   Le polynôme minimal de J_2 n'est pas scindé à racines simples, donc J_2 n'est pas diagonalisable.

13. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Alors le polynôme caractéristique de N est $P_N = (X-i)(X+i) = X^2+1$ irréductible sur $\mathbb{R}[X]$. Puisque m_N divise P_N, on en déduit que le polynôme minimal de N est $m_N = X^2+1$.

14. On considère la matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors le calcul de son polynôme caractéristique donne $P_R = X^2 - (-1) = X^2+1$, qui est aussi égal à son polynôme minimal.

15. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Alors le spectre de T est $\{i, -i\}$ et T est diagonale (donc diagonalisable). Ainsi, le polynôme minimal de T est scindé à racines simples et c'est donc $m_T = (X-i)(X+i) = X^2+1$.

16. (a) Le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de degré 3.

(b) Supposons par l'absurde qu'il existe une matrice U de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est X^2+1, Alors le polynôme caractéristique est un multiple de X^2+1 et ne possède pas d'autre racine (réelle ou complexe) que i et $-i$. Ainsi on a $P_U = (X^2+1)^\alpha$ avec $\alpha \geq 1$ ce qui est absurde car le degré de P_U vaut 3. Il n'existe donc pas de matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est X^2+1.

On aurait pu aussi procéder directement en disant que si U a pour polynôme minimal $X^2 + 1$, alors $U^2 + I_3 = 0$, c'est-à-dire $U^2 = -I_3$. Mais alors $\det(U)^2 = (-1)^3 = -1$ ce qui est absurde car $\det(U) \in \mathbb{R}$ puisque U est à coefficients réels.